INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVIII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1950

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 9.50

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig,** Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor **K. v. Sanden,** Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Braunschweig, Harzburger Straße 8a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70 u. 32 44 46

Vertriebsvertretung im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Klotter, K., Die Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsialkraft bei beliebigen Randbedingungen. Mit 9 Textabbildungen 363

Behrbohm, H. u. Oswatitsch K., Flache kegelige Körper in Überschallströmung. Mit 2 Textabbildungen 370

Dörr, J., Beitrag zu einer Wirbeltheorie des kompressiblen Mediums 378

Kucharski, W., Beiträge zur Theorie der durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte. (I. Mitteilung.) Mit 1 Textabbildung 385

Kucharski, W., Beiträge zur Theorie der durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte. (II. Mitteilung.) Mit 2 Textabbildungen ... 394

INGENIEUR-ARCHIV

XVIII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1950

Die Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsialkraft bei beliebigen Randbedingungen.

Von K. Klotter.

1. Aufgabenstellung. Die Biegeschwingungen, die ein Stab unter der Wirkung pulsierender Achsialkräfte ausführt, sind schon mehrfach behandelt worden[1]. Das Problem wurde danach in allgemeinere Zusammenhänge gestellt[2] und schließlich zu einer Theorie der Stabilität elastischer Bewegungen überhaupt ausgebaut[3]. Daneben wurden an Einzelproblemen noch untersucht die Biegeschwingungen eines Kreisringes unter pulsierendem radialem Druck und die Kippschwingungen eines I-Trägers bei pulsierenden Endmomenten[4].

Für den Stab unter pulsierender Längskraft (das Problem, von dem alle diese Untersuchungen ihren Ausgang nahmen), ist eine explizite Lösung bisher allerdings nur in dem einen Sonderfall bekannt, in dem der Stab an seinen beiden Enden gelenkig (momentenfrei) gelagert ist. Die sonst noch möglichen Randbedingungen schienen das Problem bisher so zu komplizieren, daß eine Lösung nicht gefunden werden konnte. Es läßt sich indessen zeigen, und das soll in dieser Mitteilung geschehen, daß auch diese Fälle einer unmittelbaren Behandlung zugänglich sind.

Um den Vergleich der neu in die Untersuchung einbezogenen Fälle mit dem schon bekannten Fall des beiderseits gelenkig gelagerten Stabes möglichst übersichtlich zu machen, wird im Abschnitt **2** eine nochmalige Diskussion dieses Falles (mit einer z.T. andersartigen Darstellung der schon bekannten Tatsachen) vorausgeschickt. Es folgt im Abschn. **3** die Integration der Bewegungsgleichung unter den neuen Randbedingungen; daran schließt sich im Abschn. **4** eine Diskussion der so gewonnenen Lösungen hinsichtlich ihrer Stabilität an. Der letzte Abschn. **5** faßt die neuen Ergebnisse noch einmal zusammen.

2. Der beiderseitig gelenkig gelagerte Stab. Die Differentialgleichung der Querbewegung $y(x, t)$ eines unter einer pulsierenden Achsialkraft $P = P_0 + S\cos\Omega t$ stehenden Stabes mit der (konstanten) Biegesteifigkeit EJ und der Längendichte μ lautet, wie man aus der Beziehung $M\varrho = EJ$ (M Biegemoment, ϱ Krümmungshalbmesser) leicht herleitet[5],

$$EJ\,y^{\mathrm{IV}} + (P_0 + S\cos\Omega t)\,y'' + \mu\ddot{y} = 0\,. \tag{1}$$

Sie ist eine partielle, lineare Differentialgleichung, die hinsichtlich der Längenkoordinate x von vierter, hinsichtlich der Zeit t von zweiter Ordnung ist. Ihre Koeffizienten sind nicht alle konstant; im zweiten Glied tritt als Koeffizient die Funktion $P(t)$, eine Funktion der Zeit, auf. Der Produktansatz

$$y(x, t) = Y(x)\cdot T(t)\,, \tag{2}$$

der bei konstanten Koeffizienten stets (und deshalb auch noch bei unveränderlicher Achsialkraft P) zu einer Trennung der Veränderlichen verhilft (so daß man für die Funktion $Y(x)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung, für die Funktion $T(t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung erhält) bewirkt diese Trennung bei der Differentialgleichung (1) nicht mehr.

Wenn der Stab an beiden Enden gelenkig gelagert ist, wenn also die Funktion $y(x, t)$ den Randbedingungen

$$y(0, t) = 0, \quad y''(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad y''(l, t) = 0 \tag{3}$$

zu allen Zeiten t genügen soll, so läßt sich mit Hilfe des besonderen Ansatzes

$$y(x, t) = A\sin(m\pi x/l)\cdot T(t) \tag{2a}$$

---

[1] *E. Mettler*, Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffnungshütte 8 (1940), S. 1. — *K. Klotter*, Forschg. Ing.-Wesen 12 (1941), S. 209. — *E. Mettler*, Forschungshefte Geb. Stahlbau H. 4 (1941), S. 1.

[2] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 97.

[3] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 16 (1947), S. 135 sowie 17 (1949), S. 418.

[4] *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 90 u. 197.

[5] *K. Klotter*, a. a. O. Gl. (22) mit geringer Abänderung der Bezeichnungen.

wegen des in allen drei Gliedern der Differentialgleichung (1) in gleicher Weise erscheinenden und deshalb herausziehbaren Faktors $\sin(m\pi x/l)$ allerdings die Abhängigkeit von der Ortskoordinate x beseitigen und eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Zeitfunktion $T(t)$ gewinnen. Diese Differentialgleichung lautet, nachdem man noch die Transformation $\Omega t = \tau$ vorgenommen hat[1],

$$\frac{d^2T}{d\tau^2} + T\left[\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{EJ}{\mu}\,\frac{m^4\pi^4}{l^4} - \frac{P_0}{\mu}\,\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) - S\,\frac{m^2\pi^2}{\mu\Omega^2 l^2}\cos\tau\right] = 0\,. \tag{4}$$

Sie ist eine *Mathieu*sche Differentialgleichung vom Typ

$$T'' + T(\lambda + \gamma\cos\tau) = 0 \tag{5}$$

mit τ als unabhängig Veränderlicher. Unter Benutzung der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} &\omega_m^2 = \frac{EJ}{\mu}\,\frac{m^4\pi^4}{l^4} \quad \text{(Eigenfrequenzquadrat der Biegeschwingungen } m\text{-ten Grades des unbelasteten Stabes, } P_0 = 0),\\ &P_{E,m} = EJ\,\frac{m^2\pi^2}{l^2} \quad \text{(Knicklast des Stabes mit } m \text{ Halbwellen}),\\ &p_m = \frac{P_0}{P_{E,m}}\,, \qquad s_m = \frac{S}{P_{E,m}} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

erhält die Differentialgleichung (4) die Fassung

$$T'' + \frac{\omega_m^2}{\Omega^2}\left[(1 - p_m) - s_m\cos\tau\right] T = 0\,. \tag{4a}$$

Aus ihr entnimmt man die Parameter der Differentialgleichung (5) für die Funktion $T(t)$,

$$\lambda = \frac{\omega_m^2}{\Omega^2}(1 - p_m)\,, \qquad \gamma = -\frac{\omega_m^2}{\Omega^2}\,s_m\,. \tag{5a}$$

Hinsichtlich der Funktion $T(t)$ interessiert nicht so sehr ihr Verlauf im einzelnen als vielmehr die Frage, ob sie beschränkt bleibt (stabiler Fall) oder nicht (instabiler Fall). Einen Überblick über jene Wertepaare λ, γ der Parameter, die zu stabilen oder zu instabilen Lösungen $T(t)$ führen, gibt die Stabilitätskarte der *Mathieu*schen Differentialgleichung, die sog. *Ince-Strutt*sche Karte (auch *Strutt*sche Karte schlechthin genannt) (Abb. 1). Beschränkt man die Betrachtung weiterhin auf den vornehmlich interessierenden Fall $m = 1$ (eine Halbwelle) (wir lassen im folgenden den Zeiger 1 bei ω, P_E, p und s einfach weg), so kann man aus der Stabilitätskarte (Abb. 1) die Diagramme der Abb. 2 gewinnen, in denen jeweils die (mit P_E dimensionslos gemachte) Schwankungsamplitude S als Ordinate, der (ebenso behandelte) Mittelwert P_0 als Abszisse aufgetragen ist, während der Quotient ω/Ω von Diagramm zu Diagramm andere Werte hat. Die Diagramme zeigen, daß, wenn eine von Null verschiedene Schwankungsamplitude S vorhanden ist,

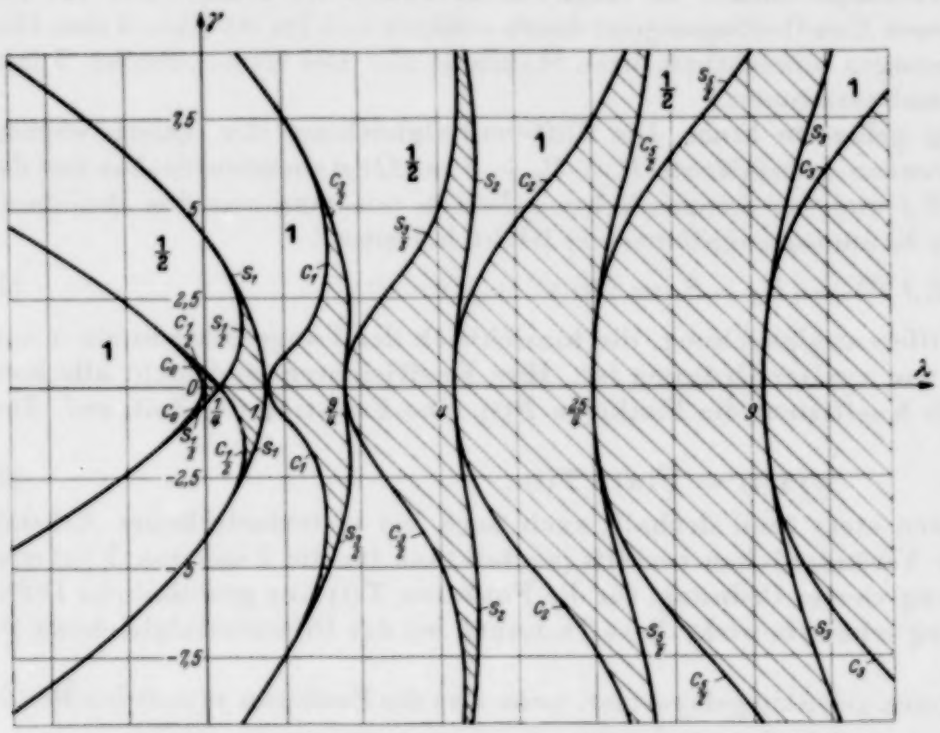

Abb. 1. *Ince-Strutt*sche Karte für die *Mathieu*sche Differentialgl. (5). Schraffierte Gebiete: stabil; helle Gebiete: instabil.

1. stabile Bewegungszustände auch dann noch vorhanden sein können, wenn der Mittelwert P_0 den *Euler*schen Wert der Knicklast, P_E, überschritten hat,

2. daß auch bei Mittelwerten P_0, die unterhalb des Wertes P_E liegen, ja sogar beim Mittelwert $P_0 = 0$, instabile Bewegungszustände auftreten können,

3. daß sogar im Bereich negativer Werte P_0, d. h. wenn die Längskraft P_0 eine Zugkraft ist, solche Instabilitäten vorkommen können.

[1] *K. Klotter*, a. a. O. Gl. (25).

In dieser Weise findet man die Tatsachen in den bisherigen Darstellungen angeführt. Statt der hier benutzten Serie von Diagrammen nach Abb. 2, in denen die Größen s und p als Koordinaten dienen[1], verwendet *E. Mettler* ein gemeinsames Diagramm, bei dem als Ordinate der Quo-

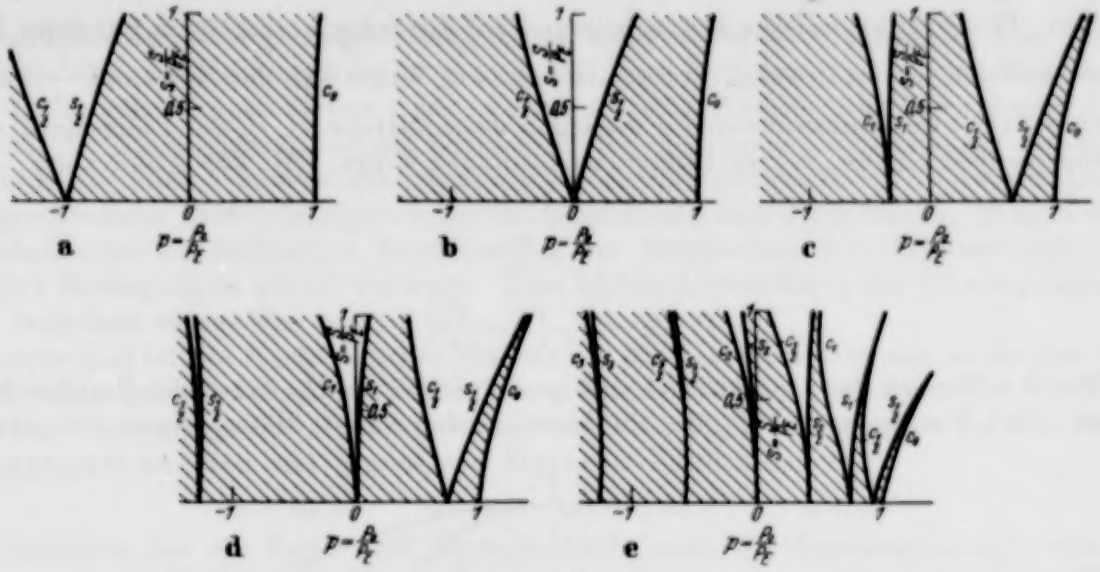

Abb. 2. s,p-Stabilitätskarten der Funktionen $T_m^{(k)}(t)$ für verschiedene Frequenzverhältnisse.
(a) $\omega^2/\Omega^2 = 1/8$, (b) $\omega^2/\Omega^2 = 1/4$, (c) $\omega^2/\Omega^2 = 3/4$, (d) $\omega^2/\Omega^2 = 1$, (e) $\omega^2/\Omega^2 = 4$.

tient Ω/ω_m (in unserer Bezeichnungsweise), als Abszisse der Quotient $S/(m^2 P_{E,1} - P_0)$ aufgetragen ist.

Wir wollen jetzt zunächst noch eine Vereinfachung vornehmen. Erstens bedenken wir, daß die Schwankungsamplituden S in der Regel klein gegen die Knicklast P_E sein werden, so daß wir

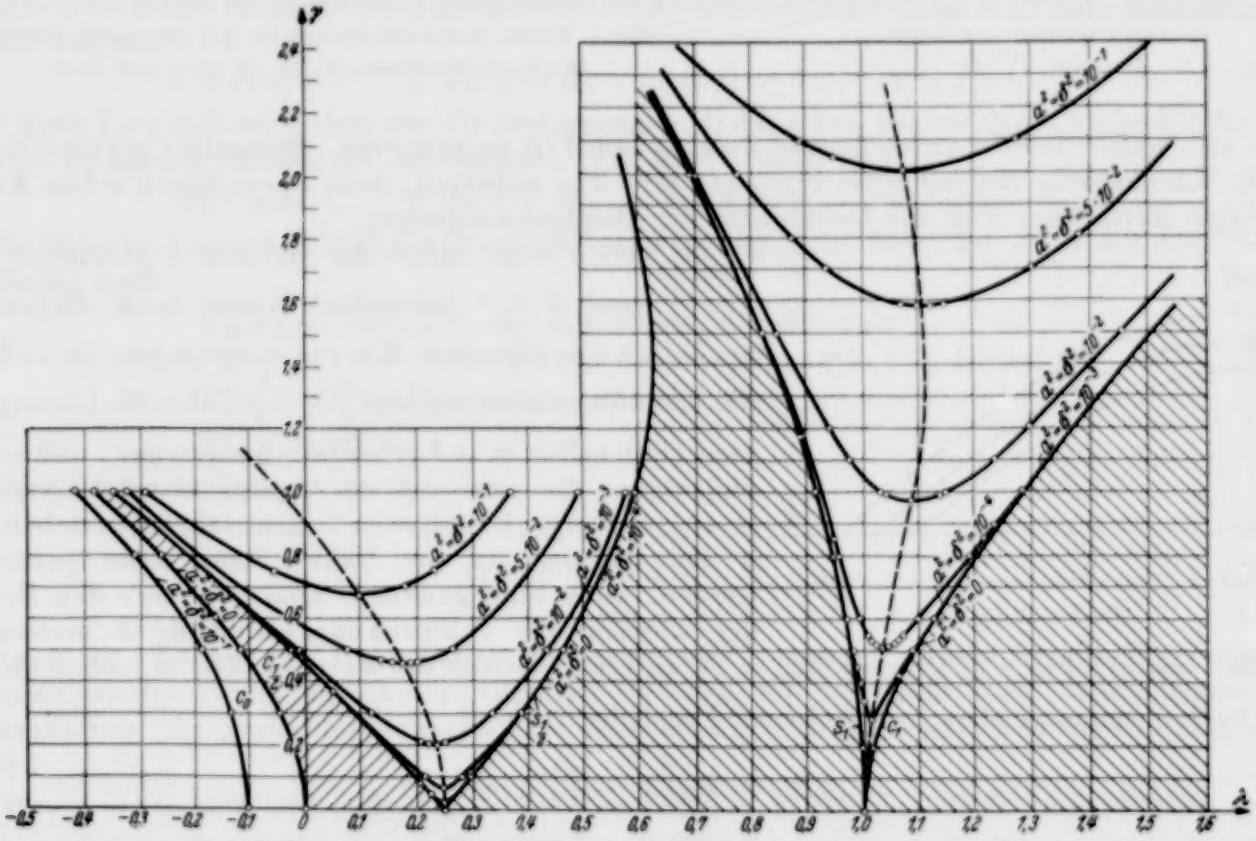

Abb. 3. γ,λ-Stabilitätskarte bei Anwesenheit von Dämpfung. Lage der Grenzkurven für verschiedene Dämpfungswerte 0; 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}; $5\cdot10^{-2}$; 10^{-1}.

mit Werten $s \ll 1$ rechnen dürfen. Für solche kleinen Werte s sind wegen der durch (5a) ausgedrückten Proportionalität zwischen s und γ die Instabilitätsbereiche schmal, wie ein Blick auf Abb. 1 lehrt. Im Hinblick auf die (hier zwar explizit nicht berücksichtigte, aber doch stets vorhandene) Dämpfung, durch die die Spitzen der Instabilitätsbereiche von der λ-Achse aus hoch-

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 363.

gezogen werden, und zwar um so mehr, je höher die Ordnung (angegeben durch den Parameter λ) des Gebietes wird (Abb. 3)[1], ist überdies praktisch allein der erste Instabilitätsbereich (dessen Spitze im Punkte $\lambda = \frac{1}{4}$ liegt) von Bedeutung; allenfalls mag der zweite noch gelegentlich Berücksichtigung finden. Beschränkt man die Betrachtungen auf die Schwingungsform mit einer Halbwelle ($m = 1$) und auf den ersten Instabilitätsbereich, also auf Werte λ in der Nähe von $\frac{1}{4}$, so gibt die erste Gleichung (5a) den Zusammenhang zwischen dem Mittelwert P_0 der Längskraft und ihrer Schwankungsfrequenz Ω an, der zu instabilen Lösungen führt. Mit der Abkürzung

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_1} \tag{7a}$$

lautet er

$$P_0 = P_E\left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right) \tag{7b}$$

und wird (für den Bereich der Druckkräfte, also positiver Werte P_0) durch die Parabel der Abb. 4 verdeutlicht. Für Wertepaare Ω, P_0, die Punkten „in der Nähe" dieser Kurve entsprechen, hat

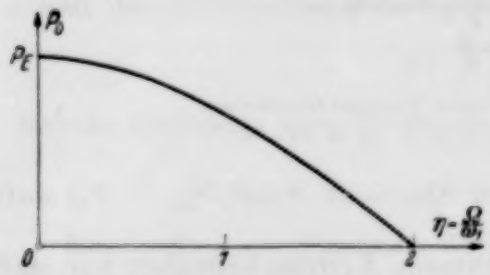

Abb. 4. Die mittlere Druckkraft P_0 in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis Ω/ω_1. Instabilitätskurve für $\lambda = 1/4$ und $m = 1$ beim gelenkig gelagerten Druckstab; Funktion $T_1^{(k)}(t)$.

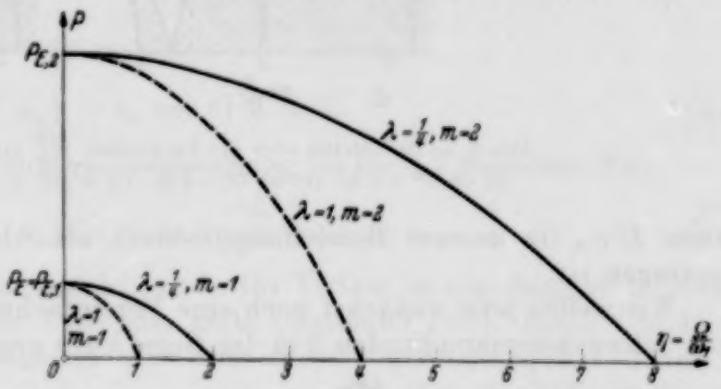

Abb. 5. Weitere Instabilitätskurven für den pulsierend belasteten Druckstab; Funktionen $T_m^{(k)}(t)$ für $m=1$ und $m=2$.

man also unbeschränkt anwachsende Funktionen $T(t)$ zu erwarten. Besonders gefährlich sind solche Längskräfte, die mit einer Frequenz $\Omega = 2\,\omega_1$ pulsieren; denn dann führen schon Kräfte mit dem Mittelwert Null zur Instabilität der Biegeschwingungen.

Abb. 6. Instabilitätsbereiche „in der Nähe" der Kurve aus Abb. 4.

In Abb. 5 sind außer der in Abb. 4 gezeigten (für $\lambda = \frac{1}{4}$ und $m = 1$ geltenden) Kurve noch diejenigen, analog zu verstehenden, Kurven eingetragen, die sich auf das erste Instabilitätsgebiet $\left(\lambda = \frac{1}{4}\right)$, aber die Lösung mit zwei Halbwellen $m = 2$ (ebenfalls ausgezogen) und ferner diejenigen, die sich auf das zweite Instabilitätsgebiet ($\lambda = 1$ mit $m = 1$ und $m = 2$, gestrichelt) beziehen.

Die Angabe „in der Nähe" kann dann präzisiert werden, wenn man genauere Aussagen über den Betrag der kleinen, die Schwankungsamplitude S messenden Größe s macht. Für $s \ll 1$ findet man z. B. zu beiden Seiten der Parabel (7b) in Abb. 4 die um $\frac{1}{2}S$ nach unten und oben verschobenen Parabeln (Abb. 6)

$$P_0 = P_E\left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right) \mp \frac{S}{2}, \tag{7c}$$

die die Grenzen des Instabilitätsbereichs angeben. Die Gleichungen (7c) folgen aus den Gleichungen der die Grenzkurven $c_{1/2}$ und $s_{1/2}$ in Abb. 1 ersetzenden Tangenten,

$$\pm\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4} - \lambda, \tag{7d}$$

durch Einführen der Größen P_0, P_E und η gemäß den Abkürzungen (6) und (7a). Ganz entsprechend sehen die Instabilitätsgebiete um die übrigen in Abb. 5 stark ausgezogenen (zu $\lambda = \frac{1}{4}$

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 363 sowie *G. Kotowski*, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 226.

gehörenden) Parabeln aus, während die Instabilitätsbereiche um die gestrichelten (zu $\lambda = 1$ gehörenden) Parabeln erheblich schmaler bleiben, sofern sie nicht vermöge der Dämpfung überhaupt verschwunden sind.

3. Integration der Bewegungsgleichung unter anderen Randbedingungen. Die Differentialgleichung der Querschwingungen ist in jedem Fall die Gleichung (1). Liegen aber Randbedingungen vor, die von (3) verschieden sind, so gibt es keinen Ansatz vom Typ (2) oder (2a) mehr, der erlaubte, die Abhängigkeit von der Ortskoordinate x dadurch zu beseitigen, daß ein gemeinsamer Faktor aus allen Gliedern der partiellen Differentialgleichung (1) herausgezogen wird, so daß eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Zeitfunktion übrig bliebe. Wegen dieses Umstandes scheiterten die bisherigen Bemühungen zur Integration der Differentialgleichung (1), wenn andere Bedingungen als (3) vorlagen. Eine kleine Abwandlung der Überlegungen eröffnet hier aber trotzdem einen Weg zum Ziel.

Im Ansatz (2a) ist die Kreisfunktion $\sin(m\pi x/l)$ die Eigenfunktion des an beiden Enden gelenkig gelagerten querschwingenden Stabes; sie erfüllt die Randbedingungen (3). Die Eigenfunktionen anderer Lagerungsfälle sind, wie immer auch die Randbedingungen im einzelnen lauten mögen, Aggregate aus den vier Kreis- und Hyperbel-Funktionen

$$\cos \varkappa_m x, \qquad \sin \varkappa_m x, \qquad \mathfrak{Cof}\, \varkappa_m x, \qquad \mathfrak{Sin}\, \varkappa_m x \tag{8}$$

mit Koeffizienten, die die Kreis- und Hyperbelfunktionen des Argumentes $\varkappa_m l$ enthalten; die Größe $\varkappa_m$ genügt dabei der jeweiligen Frequenzengleichung

$$F(\varkappa_m l) = 0 .$$

Als Beispiele betrachten wir

a) den an beiden Enden fest eingespannten Stab, für den also die Randbedingungen

$$y(0,t) = 0 , \qquad y'(0,t) = 0 , \qquad y(l,t) = 0 , \qquad y'(l,t) = 0 \tag{9a}$$

bestehen, und

b) den an einem Ende gelenkig gelagerten, am andern Ende fest eingespannten Stab mit den Randbedingungen

$$y(0,t) = 0 , \qquad y''(0,t) = 0 , \qquad y(l,t) = 0 , \qquad y'(l,t) = 0 . \tag{9b}$$

c) Zum Vergleich schreiben wir die Bedingungen (3) des schon behandelten, an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes als Gleichungen (9c) noch einmal an:

$$y(0,t) = 0, \qquad y''(0,t) = 0 , \qquad y(l,t) = 0 , \qquad y''(l,t) = 0 . \tag{9c}$$

Die Eigenfunktionen $Y^*(x)$ der freien Querschwingungen der Stäbe lauten in den drei Fällen der Reihe nach

$$Y_m^*(x) = (\cos \varkappa_m l - \mathfrak{Cof}\, \varkappa_m l)(\cos \varkappa_m x - \mathfrak{Cof}\, \varkappa_m x) + (\sin \varkappa_m l + \mathfrak{Sin}\, \varkappa_m l)(\sin \varkappa_m x - \mathfrak{Sin}\, \varkappa_m x), \tag{10a}$$

$$Y_m^*(x) = \mathfrak{Sin}\, \varkappa_m l \sin \varkappa_m x - \sin \varkappa_m l\, \mathfrak{Sin}\, \varkappa_m x , \tag{10b}$$

$$Y_m^*(x) = \sin \varkappa_m x ; \tag{10c}$$

als Frequenzengleichungen treten auf

$$1 - \cos \varkappa_m l\, \mathfrak{Cof}\, \varkappa_m l = 0 , \tag{11a}$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_m l - \mathfrak{Tg}\, \varkappa_m l = 0 , \tag{11b}$$

$$\sin \varkappa_m l = 0 . \tag{11c}$$

Damit eine Lösung $y(x,t)$ der Differentialgleichung (1) anderen als den Randbedingungen (3) angepaßt werden kann, muß sie aus Gliedern bestehen, die die Funktionen (8) möglicherweise alle enthalten. An Stelle des Ansatzes (2a) verwenden wir deshalb jetzt den vervollständigten Ansatz

$$y(x,t) = A \cos \varkappa_m x \cdot T^{(1)}(t) + B \sin \varkappa_m x \cdot T^{(2)}(t) + C\, \mathfrak{Cof}\, \varkappa_m x \cdot T^{(3)}(t) + D\, \mathfrak{Sin}\, \varkappa_m x \cdot T^{(4)}(t) \tag{12}$$

mit zunächst noch unbestimmten Zeitfunktionen $T(t)$.

Gehen wir mit dem Ansatz (12) in die Differentialgleichung (1) ein und ordnen sogleich nach den Funktionen (8), so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &A \cos \varkappa_m x \{[EJ\varkappa_m^4 - \varkappa_m^2 (P_0 + S\cos \Omega t)]\, T^{(1)} + \mu \ddot{T}^{(1)}\} + \\ &+ B \sin \varkappa_m x \{[EJ\varkappa_m^4 - \varkappa_m^2 (P_0 + S\cos \Omega t)]\, T^{(2)} + \mu \ddot{T}^{(2)}\} + \\ &+ C\, \mathfrak{Cof}\, \varkappa_m x \{[EJ\varkappa_m^4 + \varkappa_m^2 (P_0 + S\cos \Omega t)]\, T^{(3)} + \mu \ddot{T}^{(3)}\} + \\ &+ D\, \mathfrak{Sin}\, \varkappa_m x \{[EJ\varkappa_m^4 + \varkappa_m^2 (P_0 + S\cos \Omega t)]\, T^{(4)} + \mu \ddot{T}^{(4)}\} = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Gleichung (13) ist demnach erfüllbar, wenn die beiden Zeitfunktionen $T^{(1)}(t)$ und $T^{(2)}(t)$ der Differentialgleichung

$$[EJ\varkappa_m^4 - \varkappa_m^2 (P_0 + S\cos\Omega t)]\, T^{(k)} + \mu\, \ddot{T}^{(k)} = 0, \tag{14a}$$

die beiden Funktionen $T^{(3)}(t)$ und $T^{(4)}(t)$ aber der Differentialgleichung

$$[EJ\varkappa_m^4 + \varkappa_m^2 (P_0 + S\cos\Omega t)]\, T^{(h)} + \mu\, \ddot{T}^{(h)} = 0 \tag{14b}$$

genügen. (Die oberen Zeiger (k) und (h) sollen dabei auf die Kreisfunktionen und Hyperbelfunktionen hindeuten.) Die beiden Differentialgleichungen (14a) und (14b) sind *Mathieu*sche Differentialgleichungen. Beide lassen sich unter Benutzung der wegen der abweichenden Randbedingungen sinngemäß zu verstehenden Abkürzungen ω_m, P_E, m, p und s schreiben als

$$T^{(k)\prime\prime} + \frac{\omega_m^2}{\Omega^2}[(1 - p_m) - s_m\cos\tau]\, T^{(k)} = 0 \tag{15a}$$

und

$$T^{(h)\prime\prime} + \frac{\omega_m^2}{\Omega^2}[(1 + p_m) + s_m\cos\tau]\, T^{(h)} = 0\,. \tag{15b}$$

Eine partikulare Lösung $y_m(x,t)$ der Differentialgleichung (1) lautet dann gemäß dem Ansatz (12)

$$\begin{aligned} y_m(x,t) = {} & (A_m\cos\varkappa_m x + B_m\sin\varkappa_m x)\, T_m^{(k)}(t) \\ & + (C_m \mathfrak{Cof}\,\varkappa_m x + D_m\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_m x)\, T_m^{(h)}(t)\,. \end{aligned} \tag{16a}$$

Wegen der Linearität ist auch jede Summe solcher Lösungen wieder eine Lösung, so daß die allgemeine Lösung lautet

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x,t)\,. \tag{16b}$$

4. Diskussion der neuen Lösung. Die Koeffizienten A_m bis D_m in der Lösung (16b) müßten nun so bestimmt werden, daß die Randbedingungen, beispielsweise die Bedingungen (9a) oder (9b), erfüllt werden. Diese Aufgabe erforderte die Auflösung eines Systems unendlich vieler algebraischer Gleichungen der Art, wie sie hier beispielsweise gemäß den Bedingungen (9a) angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum A_m T_m^{(k)}(t) &= -\textstyle\sum C_m T_m^{(h)}(t)\,, \\ \textstyle\sum \varkappa_m B_m T_m^{(k)}(t) &= -\textstyle\sum \varkappa_m D_m T_m^{(h)}(t)\,, \\ \textstyle\sum (A_m\cos\varkappa_m l + B_m\sin\varkappa_m l)\, T_m^{(k)}(t) &= -\textstyle\sum (C_m \mathfrak{Cof}\,\varkappa_m l + D_m\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_m l) T_m^{(h)}(t)\,, \\ \textstyle\sum (-\varkappa_m A_m\sin\varkappa_m l + \varkappa_m B_m\cos\varkappa_m l)\, T_m^{(k)}(t) & \\ = -\textstyle\sum (C_m\varkappa_m\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_m l + D_m\varkappa_m \mathfrak{Cof}\,\varkappa_m l)\, T_m^{(h)}(t)\,. & \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Alle Summen sind dabei über m von 1 bis ∞ zu erstrecken. Das Gleichungssystem (17) stellt vier Gleichungen dar zwischen ∞^4 Konstanten, Gleichungen, die zu allen ∞^1 Zeitpunkten t bestehen müssen.

Zur angenäherten Lösung des Problems innerhalb eines vorgegebenen Zeitabschnitts könnte man sich darauf beschränken, in endlich vielen, etwa n, Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots t_n$ die Gleichungen (17) zu erfüllen. Man erhielte so $4n$ Gleichungen, die zur Ermittelung von jeweils n der vier Gruppen von Konstanten A_m bis D_m dienen könnten.

Da uns aber, wie wir schon mehrfach betonten, nicht so sehr der zeitliche Ablauf der Bewegung im einzelnen interessiert als vielmehr deren Stabilität, so verzichten wir auf die Ermittelung der Integrationskonstanten und schließen folgendermaßen weiter: Die Lösung $y(x,t)$ der Differentialgleichung (1) hat die Gestalt (16b). Damit sie beschränkt bleibt, müssen alle Summanden $y_m(x,t)$ und somit alle Funktionen $T_m^{(k)}(t)$ und $T_m^{(h)}(t)$ beschränkt bleiben. Diese Funktionen sind aber Lösungen der beiden *Mathieu*schen Differentialgleichungen (15a) und (15b). Die erste, die Differentialgleichung für die Funktionenklasse $T_m^{(k)}(t)$ ist formal identisch mit der Differentialgleichung (4a), die wir im Abschn. 2 schon eingehend erörtert haben. Die Differentialgleichung (15a) unterscheidet sich von der Differentialgleichung (4a) nur dadurch, daß für sie die Zeichen ω_m, $P_{E,m}$ und damit p_m und s_m eine allgemeinere Bedeutung haben. Die Größen ω_m und $P_{E,m}$ bezeichnen nicht Eigenfrequenz und Knicklast des Lagerungsfalles (3) sondern des jeweils vorliegenden Lagerungsfalles. Unter Berücksichtigung dieser Wandlung in der Bedeutung der Zeichen gelten die früheren Aussagen und somit auch die Diagramme der Abb. 2, 4 und 5 für alle

Lagerungsfälle, wenigstens hinsichtlich der Partikularlösung $m = 1$. Man muß allerdings beachten, daß zur Erfüllung von Randbedingungen, die von (3) verschieden sind, neben der Partikularlösung $m = 1$ auch die höheren herangezogen werden müssen.

Die zweite Funktionenklasse $T_m^{(h)}(t)$ genügt der Differentialgleichung (15b). Interpretiert man sie nach genau denselben Gesichtspunkten wie die Lösungen der Differentialgleichung (15a),

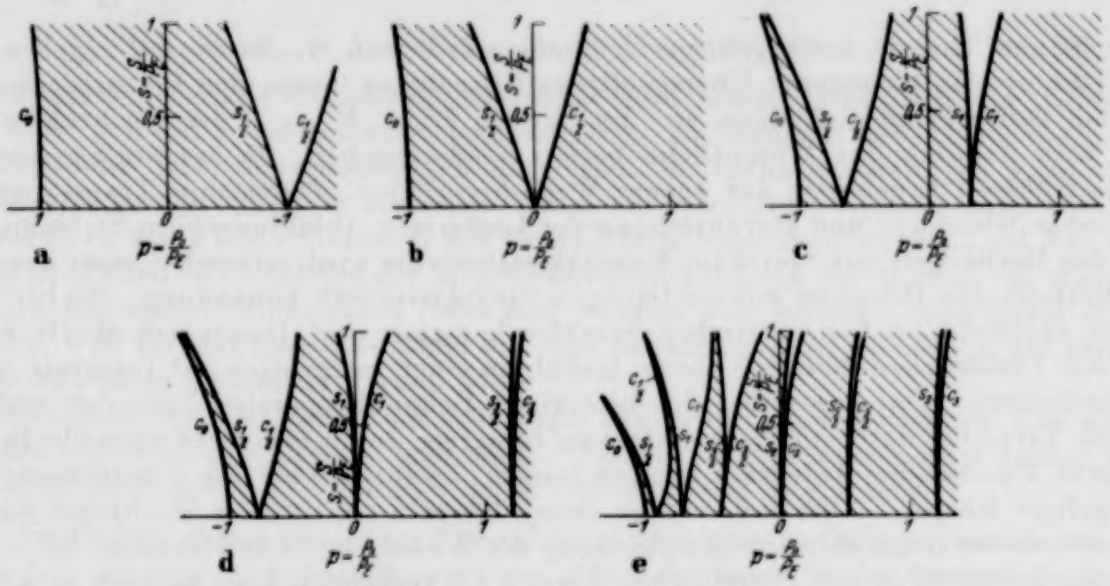

Abb. 7. s, p-Stabilitätskarten der Funktionen $T_m^{(h)}(t)$; (a) bis (e) wie in Abb. 2.

so kommt man statt zu den Diagrammen der Abb. 2 zu denen der Abb. 7 (sie sind einfach an der Ordinatenachse gespiegelt) und statt zur Kurve der Abb. 4 zu der der Abb. 8. Die Instabilitätspunkte (P_0, Ω), die entweder durch die Lösungen $T_1^{(k)}$ oder die Lösungen $T_1^{(h)}$ bedingt werden, liegen demnach (im Bereich der Druckkräfte, $P_0 > 0$) in der Nähe der Kurven der Abb. 9.

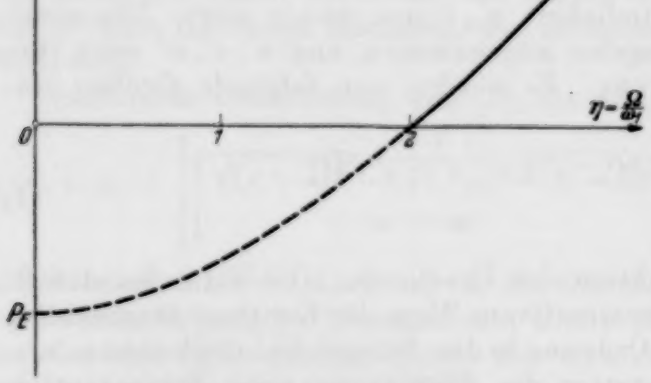

Abb. 8. Instabilitätskurve für $\lambda = 1/4$ und $m = 1$ beim pulsierend belasteten Druckstab; Funktion $T_1^{(h)}(t)$.

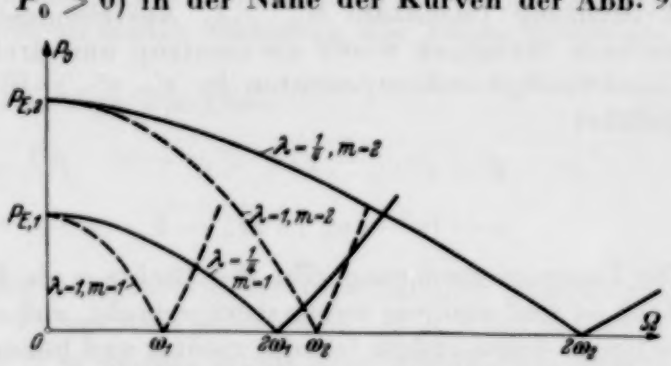

Abb. 9. Instabilitätskurven beim pulsierend belasteten Druckstab bei Berücksichtigung beliebiger Randbedingungen; Funktionen $T_m^{(k)}(t)$ und $T_m^{(h)}(t)$.

5. Zusammenfassung. Während für die Instabilität des an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes die Instabilitätsgebiete der der Differentialgleichung (14a) genügenden Funktionen $T_m^{(k)}$ allein maßgebend sind, müssen in allen anderen Lagerungsfällen auch die Instabilitätsgebiete der der Differentialgleichung (14b) genügenden Funktionen $T_m^{(h)}$ berücksichtigt werden. Die Instabilitätspunkte P_0, Ω liegen (für kleine Werte s) in der Nachbarschaft der Parabeln der Abb. 9. Die Nachbarschaft kann bei Kenntnis der Schwankungsamplitude S für die zum ersten Instabilitätsbereich ($\lambda = 1/4$) gehörenden (ausgezogenen) Parabeln so abgegrenzt werden, wie Abb. 6 andeutet.

Diese Aussagen gelten, ganz gleichgültig wie die von (3) verschiedenen Randbedingungen im einzelnen aussehen, also nicht nur für die als Beispiele herangezogenen Bedingungen (9a) und (9b), sondern für alle möglichen.

(Eingegangen am 5. Juli 1949.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. K. *Klotter*, Karlsruhe-Rüppurr, Hegaustr. 4.

Flache kegelige Körper in Überschallströmung.

Von H. Behrbohm und K. Oswatitsch.

1. Begriff und Theorie der kegeligen Strömung wurde von *A. Busemann*[1] gegeben. Flache kegelige Störkörper in homogener Überschallparallelströmung lassen eine Linearisierung der beschreibenden Differentialgleichungen zu. Im Bereich $1{,}5 < M_\infty < 5$ der Machzahlen der Anströmung wird dadurch das Wesentliche bereits wiedergegeben. In der vorliegenden Arbeit werden die früheren Ergebnisse auf neuem Wege hergeleitet. *Busemanns* Transformation auf die *Laplace*sche Gleichung und Heranziehung der konformen Abbildungen im Strömungsbereich innerhalb des Machkegels mit Spitze im Kegeligkeitszentrum wird vermieden, statt dessen findet *Pucketts* Methode der Belegung mit quellartigen Singularitäten[2] Anwendung. Da bei kegeligen Feldern die Zustände auf konzentrischen Strahlen konstant sind, lassen sich die flächenhaften Integrale der *Puckett*schen Methode durch Ausführen einer Integration auf Integrale über eine Variable reduzieren. Das gegenüber der bisherigen Behandlungsweise Neue der vorliegenden Note ist die Tatsache, daß sich diese einfachen Integrale durch geeignete partielle Integration auf die Form *Poisson*scher Integrale bringen lassen. Dadurch wird das Umströmungsproblem flacher kegeliger Körper — bei jeder Lage dieses Körpers relativ zum Machkegel durch seine Spitze — mittels der singulären Integralgleichung der Wirbelschicht beschrieben. Diese Integralgleichung spielt sowohl in der *Prandtl*schen Theorie der tragenden Linie als auch in der Theorie dünner Tragflügelprofile eine zentrale Rolle. Ihre Lösung ist unter weiten Voraussetzungen bekannt[3].

An Literatur seien zusätzlich genannt die Arbeiten von *Stewart*[4], *Sauer*[5] und *Germain*[6], die alle den von *Busemann* eingeschlagenen Weg beschreiten, und die Arbeiten von *Brown*[7] und *Ferri*[8], die sich der *Puckett*schen Methode unter Hinzunahme von Dipolen bedienen.

2. Im Raum der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x', y', z' befinde sich ein flacher kegeliger Störkörper $\mathfrak{K}'$ mit Spitze im Ursprung 0, der seine stationäre Parallelanströmung in x'-Richtung (Machzahl $M_\infty > 1$, Anströmgeschwindigkeit u'_∞) nur wenig stört. Die resultierende Strömung werde als isentrop und drehungsfrei angenommen, und u', v', w' seien ihre Geschwindigkeitskomponenten in x'-, y'-, z'-Richtung. Es werden nun folgende Größen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' & y &= y'\sqrt{M_\infty^2-1}, & z &= z'\sqrt{M_\infty^2-1}, \\ u &= (u'-u'_\infty)\sqrt{M_\infty^2-1}, & v &= v', & w &= w'. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Isentropieforderung gibt die Dichte ϱ als Funktion des Druckes p. Die Tatsache, daß $\mathfrak{K}'$ flach ist und also nur wenig stört, erlaubt, auf approximativem Wege die Kontinuitätsgleichung zu linearisieren, indem Glieder zweiter und höherer Ordnung in den Störgeschwindigkeiten u, v, w vernachlässigt werden. Die Drehungsfreiheit gestattet die Einführung eines Störpotentials $\varphi(x, y, z)$ mit $\varphi_x = u, \varphi_y = v, \varphi_z = w$. Für dieses φ geht mit Hilfe der genannten Linearisierung die gasdynamische Gleichung in die dreidimensionale Schwingungsgleichung

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0 \tag{2}$$

über. Zu dieser Differentialgleichung treten noch die Randbedingungen $u = v = w = 0$ im Anströmgebiet und die Randbedingung am Störkörper, die zum Ausdruck bringt, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf die Körperoberfläche verschwinden muß.

Die Oberfläche von $\mathfrak{K}$, des Bildes von $\mathfrak{K}'$ zufolge (1), werde durch $F(x, y, z) = 0$ beschrieben. Das Wesentliche dieser Abbildung besteht u. a. darin, daß der *Mach*sche Winkel der Anströmung

[1] *A. Busemann*, Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung Bd. 7 B (1943), H. 3, S. 105.
[2] *A. E. Puckett*, J. Aeronautical Sciences 13 (1946), S. 475.
[3] *H. Söhngen*, Math. Z. 45 (1939), S. 245.
[4] *H. J. Stewart*, Quart. appl. Mathematics, USA, Okt. 1946, S. 246.
[5] *R. Sauer*, Berechnung der aerodynamischen Beiwerte der Leitwerke nicht rotierender Geschosse bei Überschallgeschwindigkeit, unveröffentlichtes Manuskript.
[6] *P. Germain*, Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, Nr. 34, 1949.
[7] *C. E. Brown*, N. A. C. A. Technical Note No. 1183 (1946).
[8] *A. Ferri*, Elements of aerodynamics of supersonic flows. New York 1949, S. 350—383.

45° wird. Daß $\mathfrak{K}$ flach sei, werde nun etwas präziser dahingehend formuliert, daß F_x und F_y klein seien gegen F_z. Unter diesen Annahmen kann aus der Normalkomponentenforderung

$$F_x(u+u_\infty)+F_y v+F_z w=0 \quad \text{für} \quad F(x,y,z)=0$$

mit Hilfe der Forderung gegen u_∞ kleiner Störgeschwindigkeiten u, v, w auf die Näherungsgleichung

$$F_x u_\infty + F_z w=0 \quad \text{für} \quad F(x,y,z)=0$$

geschlossen werden, welche Gleichung ihrerseits dann wieder statt auf der Körperkontur $F(x,y,z)=0$ auch auf $z=0$ gefordert werden kann. Im Rahmen der für die vorgenommene Linearisierung der Strömungsgleichungen zu treffenden Vernachlässigungen kann daher die Umströmungsforderung von $\mathfrak{K}$ in einfacher Weise als geforderte Vorgabe einer w_0-Verteilung $w_0=w(z=0)$ in demjenigen Gebiet G der (x,y)-Ebene angesehen werden, auf das sich $\mathfrak{K}$ in z-Richtung projiziert. G ist infolge der Kegeligkeitsforderung ein durch zwei von 0 ausgehende Halbstrahlen begrenzter Winkelraum (oder eine Summe von solchen; doch bietet ein solcher allgemeinerer Fall für das Ergebnis keine anderen Schwierigkeiten als solche der Darstellung, weshalb er hier nicht behandelt werden soll).

Die Eigenschaft der Kegeligkeit hat zur Folge, daß der Strömungszustand, also u, v, w, nur von y/x und z/x abhängen darf; u, v, w müssen also homogene Funktionen nullter Ordnung, d. h. $\varphi(x,y,z)$ muß homogene Funktion erster Ordnung von x, y, z sein.

3. Der Einflußkegel des Ursprungs 0 (Kreiskegel mit halbem Öffnungswinkel von 45° und mit positiver x-Achse als Achse) heiße auch der *Mach*sche Kegel $\mathfrak{M}$ der Strömung. Das Innengebiet von $\mathfrak{M}$ werde als das elliptische Gebiet E der Strömung bezeichnet. Es hat nämlich mit den Gleichungen von elliptischem Typ die Eigenschaft gemeinsam, in allen seinen Teilen von der Änderung einer kegeligen Lösung betroffen zu werden. Denn jede solche Lösung reicht in die unmittelbare Umgebung des Ursprungs, deren Einflußgebiet eben durch $\mathfrak{M}$ gegeben ist. Das Gebiet H außerhalb $\mathfrak{M}$, abgesehen von dem von 0 aus stromaufwärts symmetrisch zu $\mathfrak{M}$ gelegenen Kegel, in welchem kegelige Lösungen nicht auftreten können, werde als hyperbolisch bezeichnet. E_0 bzw. H_0 sei der Durchschnitt von E bzw. H mit der Ebene $z=0$. E_0 besteht aus den inneren Punkten des ersten und achten Oktanten, H_0 aus den inneren Punkten des zweiten und dritten Oktanten einerseits, des sechsten und siebenten Oktanten der Ebene $z=0$ andererseits.

Hadamards Grundlösung von (2), die dreiparametrige Funktion

$$\varphi(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2}} & \text{für} \quad x-x_0>\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

ist der mathematische Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential einer quellartigen Singularität im Punkte x_0, y_0, z_0 bei linearisiertem Überschall. Indem man jeden Punkt $x_0, 0, 0$ der positiven x-Achse mit einer solchen Quelle des Gewichtes $-x_0$ belegt, erhält man gemäß dem Superpositionsprinzip bei linearen Differentialgleichungen die Lösung

$$\varphi_1(P)=\begin{cases}-\displaystyle\int_0^{x-\sqrt{y^2+z^2}}\frac{x_0\,dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2-y^2-z^2}}=\sqrt{x^2-y^2-z^2}-x\log\frac{x+\sqrt{x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}} & \text{für } P \text{ in } E,\\ 0 & \text{für } P \text{ außerhalb } E\end{cases}$$

von (2). Sie ist homogen erster Ordnung in x, y, z, entspricht also einer kegeligen Strömung. P ist hier und im folgenden der Aufpunkt mit den Koordinaten x, y, z. Durch analoge Belegung der positiven y-Achse wird die Lösung

$$\varphi_2(P)=\begin{cases}-\displaystyle\int_0^{y+\sqrt{x^2-z^2}}\frac{y_0\,dy_0}{\sqrt{x^2-(y-y_0)^2-z^2}}=-y\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2-z^2}}\right)-\sqrt{x^2-y^2-z^2} & \text{für } P \text{ in } E,\\ -\displaystyle\int_{y-\sqrt{x^2-z^2}}^{y+\sqrt{x^2-z^2}}\frac{y_0\,dy_0}{\sqrt{x^2-(y-y_0)^2-z^2}}=-\pi y & \text{für } P \text{ in } H\end{cases}$$

erhalten.

Bei $-1 < m < 1$ geht (2) mittels der „Lorentztransformation"

$$\bar{x} = \frac{x - m y}{1 - m^2}, \quad \bar{y} = \frac{-m x + y}{1 - m^2}, \quad \bar{z} = z, \varphi(x, y, z) = \chi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \tag{3}$$

in die Differentialgleichung $\chi_{\bar{x}\bar{x}} - \chi_{\bar{y}\bar{y}} - \chi_{\bar{z}\bar{z}} = 0$, d. h. in sich über. Demgemäß wird aus $\varphi_1(P)$ sofort eine Lösung $\varphi_1(P; m)$ von (2) erhalten, wenn $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ statt der dortigen x, y, z geschrieben und diese dann gemäß (3) durch x, y, z ausgedrückt werden. $\varphi_1(P; m)$ entspricht einer der x-Achsenbelegung analogen Quellbelegung der in E_0 gelegenen Halbgeraden $y = m x$, $x > 0$, $|m| < 1$. Da $\mathfrak{M}$ bei (3) in sich übergeht und ein in E oder H gelegener Punkt auch nach der Transformation in E oder H bleibt, sind Belegungen von in H_0 gelegenen Halbgeraden auf diese Weise nicht zu erreichen. Vielmehr hat man dazu von $\varphi_2(P)$ auszugehen und den analogen Übergang gemäß (3) zu machen wie bei $\varphi_1(P)$. Man kommt so zur Lösung $\varphi_2(P; n)$ von (2), wenn zur Unterscheidung m im elliptischen, n im hyperbolischen Bereich für den Transformationsparameter aus (3) geschrieben wird. $\varphi_2(P; n)$ entspricht einer der (positiven) y-Achsenbelegung analogen Quellbelegung der in H_0 gelegenen Halbgeraden $x = n y$, $y > 0$, $|n| < 1$.

Analog hätte man auch die negative y-Achse belegen und aus ihr durch hyperbolische Drehung die Belegungen von in $y < 0$ gelegenen Halbgeraden von H_0 gewinnen können. Diese in jedem konkreten Fall leicht zu treffenden Ergänzungen sollen zur Vereinfachung der Darstellung jedoch nicht mit aufgeführt werden, zumal sich im folgenden das Interesse nur auf Belegungen von E_0 und den in $y > 0$ gelegenen Teil von H_0 konzentrieren wird.

4. Durch abermalige lineare Superposition werden aus $\varphi_1(P; m)$ und $\varphi_2(P; n)$ allgemeinere kegelige Lösungen Φ_1 und Φ_2 von (2) gebildet, indem $\varphi_1(P; m)$ bzw. $\varphi_2(P; n)$ mit den von den Richtungskoeffizienten m bzw. n des jeweils belegten Halbstrahls abhängigen Gewichten $e(m)$ bzw. $h(n)$ multipliziert und danach über den ganzen Bereich $-1 < m < 1$ bzw. $-1 < n < 1$ nach m bzw. n integriert werden:

$$\Phi_1(P) = \int_{-1}^{1} \varphi_1(P; m)\, e(m)\, dm; \qquad \Phi_2(P) = \int_{-1}^{1} \varphi_2(P; n)\, h(n)\, dn\,. \tag{4}$$

Von nun an interessieren nur noch die durch die Quellbelegungen hervorgerufenen Störgeschwindigkeiten, d. h. die partiellen Ableitungen der $\Phi_i (i = 1, 2)$ nach x, y, z. Da diese homogene Funktionen nullter Ordnung von x, y, z sind, ist es bequem, die homogenen Koordinaten $\eta = y/x$, $\zeta = z/x$ einzuführen. Zunächst sei nur die z-Komponente $w(\eta, \zeta)$ der E_0-Belegung betrachtet. Man ermittelt für $\zeta \neq 0$ die Darstellung

$$w(\eta, \zeta) = \zeta \sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2} \int_{-1}^{1} \frac{(1 - m^2)\, e(m)\, dm}{(m - \eta)^2 + (1 - m^2)\, \zeta^2} \quad \text{für } P \text{ in } E, \text{ d. h. für } \eta^2 + \zeta^2 < 1\,,$$

während w für P außerhalb E identisch verschwindet. Hieraus folgert man durch partielle Integration [unter Annahme der Existenz von $\lim_{m \to \pm 1} (1 - m^2)\, e(m)$] leicht das *Puckett*sche Ergebnis

$$w_0(\eta) = w(\eta, 0) = \lim_{\zeta \to +0} w(\eta, \zeta) = \pi(1 - \eta^2)\, e(\eta) \qquad \text{für alle } -1 < \eta < 1\,. \tag{5}$$

Es gibt einen sehr einfachen Zusammenhang zwischen der Gewichtsbelegung $e(m)$ der elliptisch gelegenen Halbgeraden und der von dieser Belegung auf dieser Halbgeraden erzeugten z-Komponente $w_0(m)$ der Störgeschwindigkeit, wobei, was wohl beachtet werden möge, der Grenzübergang $\zeta \to +0$ aus dem oberen Halbraum $\zeta > 0$ heraus durchzuführen ist. Im Falle $\zeta \to -0$, d. h. von $\zeta < 0$ her, hätte sich nach dem dritten Gleichheitszeichen in (5) ein Minuszeichen ergeben, was für später wichtig ist.

Indem man nun $e(m)$ in (4) durch $w_0(m)$ ausdrückt und die Funktion

$$f(m) = f(\eta, \zeta; m) = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \log \frac{1 - m\eta + \sqrt{1 - m^2}\sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}}{\sqrt{(m - \eta)^2 + (1 - m^2)\, \zeta^2}} \quad \text{für } \eta^2 + \zeta^2 < 1,\ |m| < 1$$

einführt, kann man die aus der E_0-Belegung herrührenden Störgeschwindigkeiten $u(\eta, \zeta)$, $v(\eta, \zeta)$, $w(\eta, \zeta)$ bei Beschränkung auf den oberen Halbraum in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} u(\eta,\zeta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\,(mf(\eta,\zeta;m))}{\partial m}\,w_0(m)\,dm\,,\\ v(\eta,\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\partial f(\eta,\zeta;m)}{\partial m}\,w_0(m)\,dm\,,\\ w(\eta,\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial m}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-\zeta^2)\,m-\eta}{\zeta\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}}\right)w_0(m)\,dm \end{aligned}\right\}\quad\text{für } P \text{ in } E \qquad (6)$$

schreiben. Für $\zeta \to +0$ geht (6) in

$$\left.\begin{aligned} u_0(\eta) &= u(\eta,0) = \lim_{\zeta\to+0} u(\eta,\zeta) = -\int_{-1}^{1}\frac{\partial\,(mf(\eta,0;m))}{\partial m}\,w_0(m)\,dm\,,\\ v_0(\eta) &= v(\eta,0) = \lim_{\zeta\to+0} v(\eta,\zeta) = \int_{-1}^{1}\frac{\partial f(\eta,0;m)}{\partial m}\,w_0(m)\,dm \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

für P in E, d. h. für $-1 < \eta < 1$ über, wo über die singuläre Stelle $m = \eta$ des Integranden hinweg hier und im folgenden mittels *Cauchy*scher Hauptwertbildung zu integrieren ist. Um die Störgeschwindigkeiten u, v des durch (4) gegebenen Störpotentials $\Phi_1(P)$ auch im unteren Halbraum richtig zu bekommen, hat man der obigen Bemerkung zufolge den rechten Seiten in (6) und (7) die entgegengesetzten Vorzeichen zu geben, da die erzeugten u, v ja gerade Funktionen von ζ sind.

Außerhalb E, d. h. auf und außerhalb $\mathfrak{M}$, verschwinden die von $\Phi_1(P)$ herrührenden u, v, w identisch.

Ganz das Entsprechende gilt nun auch für die aus $\Phi_2(P)$ d. h. aus der H_0-Belegung herkommenden Störgeschwindigkeiten. Zunächst gilt analog zu (5) wieder das *Puckett*sche Ergebnis

$$w_0(n) = \lim_{\zeta\to\pm0} w(n,\zeta) = \pm\pi(1-n^2)\,h(n) \qquad \text{für alle } -1 < n < 1.$$

Für ein hyperbolisch und im Einflußgebiet der Belegung gelegenes P gelten dann bei Beschränkung auf den oberen Halbraum und unter Benutzung der Abkürzung

$$\Omega = \frac{xy - |z|\sqrt{y^2+z^2-x^2}}{y^2+z^2}$$

die Formeln

$$u(x,y,z) = \int_{-1}^{\Omega}\frac{n\,w_0(n)\,dn}{(1-n^2)^{3/2}} - \frac{xz + y\sqrt{y^2+z^2-x^2}}{y^2+z^2}\,\frac{w_0(\Omega)}{1-\Omega^2}\,,$$

$$v(x,y,z) = -\int_{-1}^{\Omega}\frac{w_0(n)\,dn}{(1-n^2)^{3/2}} - \frac{yz\,(y^2+z^2-2x^2) + x\,(z^2-y^2)\sqrt{y^2+z^2-x^2}}{(y^2+z^2)^2}\,\frac{w_0(\Omega)}{1-\Omega^2}\,,$$

$$w(x,y,z) = \frac{(xz + y\sqrt{y^2+z^2-x^2})^2}{(y^2+z^2)^2}\,\frac{w_0(\Omega)}{1-\Omega^2}\,,$$

die für $z \to +0$ in

$$u_0(x,y) = \int_{-1}^{x/y}\frac{n\,w_0(n)\,dn}{(1-n^2)^{3/2}} - \frac{w_0(x/y)}{\sqrt{1-(x/y)^2}}\,,$$

$$v_0(x,y) = -\int_{-1}^{x/y}\frac{w_0(n)\,dn}{(1-n^2)^{3/2}} + \frac{x}{y}\,\frac{w_0(x/y)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}$$

übergehen.

Zur einfachen Darstellung der in einem elliptisch gelegenen P durch die H_0-Belegung bewirkten Störgeschwindigkeiten führt man die Funktion

$$g(n) = g(\eta, \zeta; n) = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\eta - n}{\sqrt{(1-n\eta)^2 - (1-n^2)\zeta^2}}\right) \quad \text{für} \quad \eta^2 + \zeta^2 < 1,\ |n| < 1$$

ein. Mit ihrer Hilfe findet man bei Beschränkung auf den oberen Halbraum die Formeln

$$\left.\begin{aligned} u(\eta,\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial g(\eta,\zeta;n)}{\partial n}\, w_0(n)\, dn\,, \\ v(\eta,\zeta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\partial\,(n g(\eta,\zeta;n))}{\partial n}\, w_0(n)\, dn\,, \\ w(\eta,\zeta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(\eta^2+\zeta^2)\,n-\eta}{\zeta\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}}\right) w_0(n)\, dn \end{aligned}\right\} \text{für } P \text{ in } E \tag{8}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} u_0(\eta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\partial g(\eta,0;n)}{\partial n}\, w_0(n)\, dn\,, \\ v_0(\eta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\partial\,(n g(\eta,0;n))}{\partial n}\, w_0(n)\, dn\,. \end{aligned}\right\} \text{für } P \text{ in } E \tag{9}$$

Im Gegensatz zu (7) sind die Integrale in (9) gewöhnliche Integrale. Im unteren Halbraum haben die Formeln für u und v die entgegengesetzten Vorzeichen.

5. Entscheidend für den hier vorzulegenden neuen Aufbau der Theorie linearisierter kegeliger Strömungen ist nun eine Umformung der Formeln (6) bzw. (7) für die Störgeschwindigkeiten u, v aus einer E_0-Belegung. Man ziehe aus den Integranden der ersten beiden Formeln (6) den Faktor $1/(1-m^2)^{3/2}$ heraus und integriere alsdann partiell. Hierzu bilde man aus der Geschwindigkeitsbelegung $w_0(m)$ die Integrale

$$F_1(m) = \int_0^m \frac{w_0(\mu)\, d\mu}{(1-\mu^2)^{3/2}} \qquad \text{und} \qquad F_2(m) = \int_0^m \frac{w_0(\mu)\, \mu\, d\mu}{(1-\mu^2)^{3/2}} \tag{10}$$

für $|m| < 1$ und führe die beiden Funktionen

$$\left.\begin{aligned} K_1(m) &= m^2 \frac{d}{dm}\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m} F_1(m)\right) = \frac{m\, w_0(m)}{1-m^2} - \frac{F_1(m)}{\sqrt{1-m^2}}\,, \\ K_2(m) &= \frac{1}{m}\frac{d}{dm}\left(\sqrt{1-m^2}\, F_2(m)\right) = \frac{w_0(m)}{1-m^2} - \frac{F_2(m)}{\sqrt{1-m^2}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

für $|m| < 1$ ein. Mit diesen Bezeichnungen gehen dann aus (6) durch partielle Integration die Formeln

$$\pi\, u(\eta,\zeta) = \sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\int_{-1}^{1} \frac{m-\eta}{(m-\eta)^2 + (1-m^2)\,\zeta^2}\, K_1(m)\, dm - \sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\left(\frac{w_0(1)}{1-\eta} + \frac{w_0(-1)}{1+\eta}\right),$$

$$\pi\, v(\eta,\zeta) = -\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\int_{-1}^{1} \frac{m-\eta}{(m-\eta)^2 + (1-m^2)\,\zeta^2}\, K_2(m)\, dm + \sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\left(\frac{w_0(1)}{1-\eta} - \frac{w_0(-1)}{1+\eta}\right)$$

für η, ζ aus E und $\zeta \neq 0$ hervor. Der Grenzübergang $\zeta \to +0$ liefert hieraus

$$\left.\begin{aligned} \pi\, u_0(\eta) &= \sqrt{1-\eta^2}\int_{-1}^{1}\frac{K_1(m)\,dm}{m-\eta} - \left(\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\,w_0(1) + \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\,w_0(-1)\right), \\ \pi\, v_0(\eta) &= -\sqrt{1-\eta^2}\int_{-1}^{1}\frac{K_2(m)\,dm}{m-\eta} + \left(\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\,w_0(1) - \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\,w_0(-1)\right) \end{aligned}\right| \text{ für } -1<\eta<1\,. \quad (12)$$

Dabei sind die nach Anwendung der *Hopital*schen Regel auf die ausintegrierten Bestandteile erhaltenen Ausdrücke $w_0(1)$ und $w_0(-1)$ als die Grenzwerte von $w_0(m)$ bei $m \to 1-0$ bzw. bei $m \to -1+0$ (also vom Innern von E_0 her) einzusetzen. Gleichung (12) gibt die in der Einleitung bereits erwähnte *Poisson*sche Integraldarstellung der von einer E_0-Belegung herrührenden Störgeschwindigkeiten in der (x, y)-Ebene.

6. Mit $\Phi_1(P)$ und $\Phi_2(P)$ aus (4) ist auch $\Phi(P) = \Phi_1(P) + \Phi_2(P)$ Lösung von (2). Sie erfüllt offenbar die Randbedingungen $u = v = w = 0$ im Anströmgebiet. Damit $\Phi(P)$ das Störpotential der Überschallumströmung des kegeligen Störkörpers $\mathfrak{K}$ sei, ist nach den Entwicklungen des Abschnitts 2 noch die Bedingung

$$w_0(x, y) = -u_\infty \frac{F_x}{F_z} \quad \text{für } x, y \text{ in } G$$

zu erfüllen. $\mathfrak{K}$ wird für $z > 0$ durch Vorgabe von $\bar{w}_0$ auf dem oberen Ufer von G, für $z < 0$ durch Vorgabe von $\underline{w}_0$ auf dem unteren Ufer von G gegeben. Für jeden der beiden Halbräume können dann mit dem Formelapparat aus 4 bzw. 5 die Störgeschwindigkeiten $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ für $z < 0$ durch $\underline{w}_0$, $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ für $z < 0$ durch $\underline{w}_0$ ausgedrückt werden. Danach sind diese beiden Strömungsbereiche außerhalb G den Randbedingungen gemäß zusammenzufügen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $\bar{w}_0$ und $\underline{w}_0$ sind auf der ganzen Ebene $z = 0$ bekannt. Dies ist einerseits der Fall, wenn beide Ränder von $\mathfrak{K}$ in H liegen, andererseits wenn $\mathfrak{K}$ bei beliebiger Lage seiner Ränder symmetrisch in bezug auf $z = 0$ ist. Stets ist dann $\bar{w}_0 = \underline{w}_0 = 0$ außerhalb G.

II. $\bar{w}_0$ und $\underline{w}_0$ sind in einem Teil von $z = 0$ zunächst unbekannt. Dies ist dann der Fall, wenn ein asymmetrischer Körper das Gebiet E_0 nicht ganz erfüllt. Auf G ist dann $\bar{w}_0$ und $\underline{w}_0$ vorgeschrieben, auf E_0 außerhalb G muß $\bar{w}_0 = \underline{w}_0$ sein.

Nur dieser Fall II ist noch zu behandeln. Er läßt sich durch Lorentztransformationen auf zwei spezielle Fälle zurückführen:

1. Ein Körperrand ist die x-Achse, der andere liegt in H_0 und ist gegeben durch $x = n_1 y$, $z = 0$ für $y > 0$ und $|n_1| < 1$.

2. Beide Körperränder liegen symmetrisch zur x-Achse in E_0 und sind durch die Halbgeraden $y = \pm m_1 x$, $z = 0$ für $x > 0$ und $0 < m_1 < 1$ gegeben.

Im Unterfall 1. ist $\bar{w}_0$ und $\underline{w}_0$ für G gegeben und für E_0 außerhalb G, d. h. für $-1 < m < 0$, so zu bestimmen, daß dort $\bar{u}_0(m) = \underline{u}_0(m)$, $\bar{v}_0(m) = \underline{v}_0(m)$, $\bar{w}_0(m) = \underline{w}_0(m)$ gilt. Man zeigt mittels der Gleichung $\partial u_0/\partial y = \partial v_0/\partial x$ für die Wirbelfreiheit leicht, daß die v_0-Gleichheit keine neue Bedingung darstellt, sondern stets gleichzeitig mit der u_0-Gleichheit erfüllt ist. Für einen Aufpunkt $P(\eta)$ mit $-1 < \eta < 0$ ist nach (9) und (12) unter Beachtung von $\bar{w}_0(-1) = \underline{w}_0(-1) = 0$

$$\pi\,\bar{u}_0(\eta) = \int_{n_1}^{1}\frac{\partial\, g(\eta, 0; n)}{\partial n}\,\bar{w}_0(n)\,dn - \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\,w_0(1) + \sqrt{1-\eta^2}\int_{0}^{1}\frac{\bar{K}_1(m)\,dm}{m-\eta} + \sqrt{1-\eta^2}\int_{-1}^{0}\frac{\bar{K}_1(m)\,dm}{m-\eta}$$

aus dem oberen Halbraum her, nebst einer analogen Gleichung aus dem unteren Halbraum her, in der nur rechts jedes Glied das entgegengesetzte Zeichen trägt. In den rechten Seiten beider Gleichungen sind jeweils nur die Hauptwertintegrale unbekannt. Aus der Gleichsetzung der linken Seiten erhält man daher unter Beachtung von $\bar{K}_1(m) = K_1(m) = K_1(m)$ für $-1 < m < 0$ die singuläre Integralgleichung

$$\int_{-1}^{0}\frac{\bar{K}_1(m)\,dm}{\eta - m} = L_1(\eta) \quad \text{für} \quad -1 < \eta < 0$$

mit bekannter rechter Seite $L_1(\eta)$. Sie hat die Lösung (Fußn. 3)

$$K_1(m) = \frac{C}{2\pi\sqrt{-m(m+1)}} - \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{-m(m+1)}}\int_{-1}^{0}\frac{L_1(t)\sqrt{-t(t+1)}}{m-t}\,dt \tag{13}$$

für $-1 < m < 0$, mit zunächst noch unbekannter Konstanten C. Hieraus kann mittels (10) und (11) auch $w_0(m)$ für $-1 < m < 0$ angegeben und durch dieses Zurückgehen auf $w_0(m)$ auch C bestimmt werden. Damit ist dann das in G bereits gegebene $\bar{w}_0(m)$ und $\underline{w}_0(m)$ zu einer auch in ganz E_0 definierten Funktion ergänzt, also schließlich in der ganzen Ebene $z = 0$ bekannt.

Im Unterfall 2. ist $\bar{w}_0(1) = \bar{w}_0(-1) = \underline{w}_0(1) = \underline{w}_0(-1) = 0$ und daher für ein $P(\eta)$ mit $m_1 < \eta < 1$ nach (12)

$$\pi\bar{u}_0(\eta) = \sqrt{1-\eta^2}\int_{-1}^{-m_1}\frac{\bar{K}_1(m)\,dm}{m-\eta} + \sqrt{1-\eta^2}\int_{m_1}^{1}\frac{\bar{K}_1(m)\,dm}{m-\eta} + \sqrt{1-\eta^2}\int_{-m_1}^{m_1}\frac{\bar{K}_1(m)\,dm}{m-\eta}$$

mit analoger Gleichung für $\pi\underline{u}_0(\eta)$, in der dann rechts nur lauter Minuszeichen stehen. Aus der $\bar{u}_0$-Gleichheit folgt daher

$$\left|\int_{-1}^{-m_1} + \int_{m_1}^{1}\frac{\bar{K}_1(m)+\underline{K}_1(m)}{m-\eta}\,dm\right| = -\int_{-m_1}^{m_1}\frac{\bar{K}_1(m)+\underline{K}_1(m)}{m-\eta}\,dm \quad \text{für} \quad |m_1| < |\eta| < 1$$

mit bekannter rechter Seite. Infolge der Körpersymmetrie in bezug auf $y = 0$, die hier lediglich der Einfachheit der Darstellung und ihres vorzugsweisen Auftretens in der Praxis wegen vorausgesetzt werden soll, ist $\bar{K}_1(-m) = -\bar{K}_1(m)$, $\underline{K}_1(-m) = -\underline{K}_1(m)$, so daß man mit der Abkürzung $\bar{K}_1(m) + \underline{K}_1(m) = 2\,K_1(m)$ auf die Integralgleichung

$$\int_{m_1^2}^{1}\frac{K_1(\sqrt{t})\,dt}{t-\eta^2} = -\int_{0}^{m_1^2}\frac{K_1(\sqrt{t})\,dt}{t-\eta^2} \quad \text{für} \quad m_1^2 < \eta^2 < 1$$

mit bekannter rechter Seite geführt wird. Dies ist wieder eine Integralgleichung vom selben Typ wie im Unterfall 1., aus der $K_1(m)$ und damit $w_0(m)$ für $|m_1| < m < 1$ gefunden werden und damit dann das gesamte Strömungsfeld berechnet werden kann.

7. Mit Hilfe der oben dargelegten Entwicklungen kann das räumliche Geschwindigkeitsfeld um irgend einen flachen, kegeligen Störkörper in homogener Überschallparallelströmung im Rahmen der in Abschnitt 2 geschilderten Linearisierung der Strömungsgleichungen berechnet werden. Derselbe Körper $\mathfrak{K}$ wird danach bei zwei verschiedenen Anstellwinkeln durch eine um den konstanten Betrag der Anstellwinkeldifferenz geänderte $\bar{w}_0$- und $\underline{w}_0$-Verteilung gegeben. Mit anderen Worten: Ist die Druckverteilung des nicht angestellten Körpers bekannt, so wird seine Druckverteilung bei irgendeiner kleinen Anstellung dadurch aus jener gewonnen, daß man ihr die Druckverteilung der entsprechend angestellten, unendlich dünnen ebenen Platte additiv überlagert.

Wegen der hierdurch aufgedeckten großen Rolle, die die dünne tragende Dreiecksplatte für die Berechnung angestellter kegeliger Körper spielt, und weil ihre Theorie als reife Frucht leicht aus den bisherigen allgemeinen Darlegungen entnommen werden kann, seien zum Abschluß die wichtigsten Angaben über diesen an und für sich bestens bekannten Gegenstand erlaubt.

Für das elliptisch (und symmetrisch zur x-Achse) gelegene Dreieck der Abb. 1 ist $\bar{w}_0(m) = \underline{w}_0(m) = w_0(m) = \lambda = \text{const}$ für $-m_1 \leq m \leq m_1$, daher $\bar{K}_1(m) = \underline{K}_1(m) = K(m) = 0$ für $-m_1 < m < m_1$, so daß die rechte Seite von (14) verschwindet. Man hat die Lösung

$$K_1(m) = \frac{C}{\sqrt{1-m^2}\sqrt{m^2-m_1^2}} \quad \text{für} \quad m_1 < m < 1$$

mit $K_1(-m) = -K_1(m)$. Hieraus ergibt sich nach (10) und (11)

$$w_0(m) = \lambda + C\left|\frac{1}{m}\sqrt{\frac{1-m^2}{m^2-m_1^2}} + \int_{m_1}^{m}\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}\sqrt{t^2-m_1^2}}\right| \quad \text{für} \quad m_1 < m < 1$$

und also wegen $w_0(1) = 0$

$$m_1^2\,\lambda + CE'(m_1) = 0\,,$$

wo $E'(m_1)$ das zum Modul $\sqrt{1-m_1^2}$ gehörige vollständige Legendresche Integral zweiter Gattung bezeichnet. Damit ist C bestimmt. Nach elementaren Rechnungen ergibt sich aus (12)

$$u_0(\eta) = \mp \frac{\lambda m_1^2}{E'(m_1)} \frac{1}{\sqrt{m_1^2 - \eta^2}}, \qquad v_0(\eta) = \pm \frac{\lambda}{E'(m_1)} \frac{\eta}{\sqrt{m^2 - \eta^2}}$$

für $-m_1 < \eta < m_1$. Damit sind sämtliche drei Störgeschwindigkeiten an der Dreiecksfläche ermittelt. Die oberen Vorzeichen gelten für das obere, die unteren für das untere Ufer der tragenden Fläche.

Für das gemischt gelegene Dreieck der Abb. 2 ist

$$\bar{w}_0(m) = w_0(m) = w_0(m) = \lambda = \text{const}$$

für $0 \leq m \leq 1$

und

$$\bar{w}_0(n) = w_0(n) = w_0(n) = \lambda = \text{const}$$

für $n_1 \leq n \leq 1$

bei $-1 < n_1 < 1$.

Daher ist $\bar{K}_1(m) = K_1(m) = 0$ für $0 \leq m < 1$ und für das L_1 der rechten Seite von (13) ergibt sich

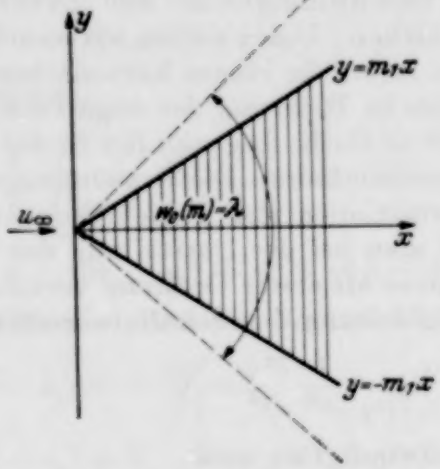

Abb. 1. Das elliptisch gelegene, zur x-Achse symmetrische, tragende Dreieck.

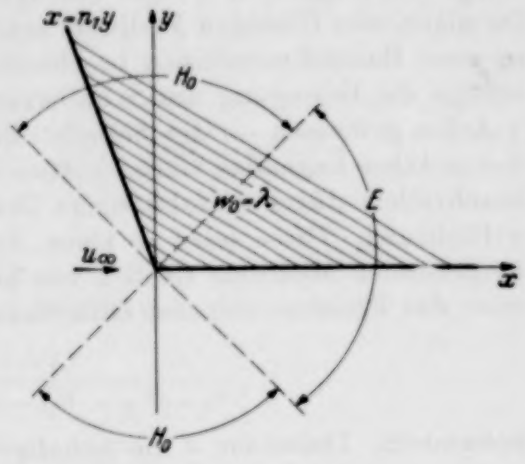

Abb. 2. Das gemischt gelegene Dreieck mit zur Anströmung paralleler Randkante.

$$L_1(\eta) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-n_1^2}\sqrt{1-\eta^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\eta - n_1}{1 - n_1 \eta} \right) \quad \text{für} \quad -1 < \eta < 0.$$

Damit wird nach (13)

$$K_1(m) = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{1-n_1^2}\sqrt{1-m^2}} \log \left| \frac{\sqrt{1-n_1}\sqrt{-m} - \sqrt{1-m}}{\sqrt{1-n_1}\sqrt{-m} + \sqrt{1-m}} \right| \quad \text{für} \quad -1 < m < 0,$$

wenn die Konstante C jener Formel durch Zurückgehen auf $w_0(m)$ aus der Forderung der Endlichkeit des Massenflusses geeignet bestimmt wird. Man erhält so aus (10) und (11)

$$w_0(m) = -\frac{2\lambda}{\pi\sqrt{1+n_1}} \sqrt{\frac{1+m}{-m}} + \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1 + (2+n_1)m}{1 - n_1 m} \right) \quad \text{für} \quad -1 < m < 0$$

und daraus nach (12)

$$u_0(\eta) = \pm \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{1-n_1^2}} \arccos \frac{1 - (2 - n_1)\eta}{1 - n_1 \eta} \quad \text{für} \quad 0 < \eta < 1,$$

und durch Vermittlung von $K_2(m)$ schließlich noch

$$v_0(\eta) = \pm \frac{1}{\pi} \frac{2\lambda}{\sqrt{1+n_1}} \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} \pm \frac{2\lambda n_1}{\pi\sqrt{1-n_1^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1-\eta}{1-n_1\eta}} \right) \quad \text{für} \quad 0 < \eta < 1.$$

Alle anderen Lagen tragender Dreiecke werden durch Lorentztransformationen auf die beiden hier behandelten zurückgeführt.

(Eingegangen am 6. März 1950.)

Anschrift der Verfasser: Dr. *H. Behrbohm*, Waldkirch i. Breisgau, Merklinstr. 38
Dozent Dr. *K. Oswatitsch*, Stockholm, Flugtechn. Inst. d. Techn. Hochschule.

Beitrag zu einer Wirbeltheorie des kompressiblen Mediums.

Von J. Dörr.

1. Aufgabenstellung. Wir wollen das von einem bewegten Schallstrahler oder von einem im Fluge schwingenden Flügel erzeugte Geschwindigkeits- und Druckfeld des umgebenden gasförmigen oder flüssigen Mediums untersuchen. Dabei wollen wir annehmen, daß sich das Problem in zwei Raumdimensionen beschreiben lasse. In einem kartesischen Koordinatensystem (x, y) erfolge die Bewegung des Schallstrahlers in Richtung der negativen x-Achse. In Richtung der y-Achse gemessen sei der Schallstrahler so flach, das man ihn in der (x, y)-Ebene durch ein auf der x-Achse liegendes Geradenstück ersetzen kann. Die Schwingungen des Schallstrahlers seien beschrieben durch zeitabhängige Deformationen und Verschiebungen dieses Geradenstückes in y-Richtung. Diese seien so klein, daß man bei der Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes des umgebenden Mediums Größen von höherer als erster Ordnung vernachlässigen kann. Dann darf man das Problem mit der Differentialgleichung der Schallausbreitung

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1a}$$

behandeln. Dabei ist c die Schallgeschwindigkeit und

$$v_s = \text{grad}_s\,\varphi \tag{1b}$$

die Geschwindigkeit des Mediums in Richtung des Vektors $\mathfrak{s}$. Die durch die Differentialgleichung (1) gestellte Aufgabe muß noch ergänzt werden durch die Randbedingung, daß das Medium den schwingenden Schallstrahler immer lückenlos umschließen muß. Wenn die Marschgeschwindigkeit v des Schallstrahlers kleiner als die Schallgeschwindigkeit c ist, dann muß zur Gewährung einer eindeutigen Lösung noch die *Kutta*sche Abflußbedingung beachtet werden. Wir betrachten im folgenden nur den Fall $v < c$.

Für $c \to \infty$ geht (1a) in die klassische Potentialgleichung über, die für zwei Dimensionen mit funktionentheoretischen Methoden behandelt werden kann. Bei instationären Problemen führt aber die Abflußbedingung zu einer wesentlichen Erschwerung der gestellten Aufgabe. Trotzdem konnte für den Sonderfall $c \to \infty$ mit funktionentheoretischen Methoden eine exakte Lösung gefunden werden und zwar von *Ellenberger-Schmieden*[1] und von *Theodorsen*[2].

Ein anderer Weg zur Lösung bietet sich für $c \to \infty$ mit einer auf *Birnbaum* zurückgehenden Methode; bei der die Lösung durch eine Überlagerung von gebundenen und freien Wirbeln gewonnen wird. Dieses Verfahren führt auf eine recht komplizierte Intelgralgleichung, deren exakte Lösung *Schwarz*[3] und *Söhngen*[4] gelang unter Heranziehung des von *Betz* für den stationären Fall gefundenen lösenden Kerns.

Eine Übertragung dieser Methoden auf den Fall des kompressiblen Mediums ist nicht ohne weiteres möglich. Die funktionentheoretische Methode versagt, weil sich die Differentialgleichung (1a) für $\partial^2\varphi/\partial t^2 \neq 0$ nicht funktionentheoretisch deuten läst. Die Wirbelmethode versagte, weil für das kompressible Medium kein Potentialausdruck bekannt war, mit dem sich ein gebundener Wirbel mit seinem am Entstehungsort liegen bleibenden freien Wirbel (Anfahrwirbel) beschreiben läst. *Prandtl* löste an sich alle Schwierigkeiten durch Einführung des sog. Beschleunigungspotentials, bei dem sich an Stelle der Elementarlösung des Wirbels die des Dipols verwenden läßt. Die außerordentliche Fruchtbarkeit der Wirbelmethode für das inkompressible Medium sollte aber ein Hinweis sein, die Übertragbarkeit der Wirbelmethode auf das kompressible Medium in aller Konsequenz zu überprüfen. Das Folgende soll ein solcher Versuch sein.

2. Der gebundene Wirbel konstanter Auftriebskraft mit seinem freien Anfahrwirbel im kompressiblen Medium. Wir führen unsere Betrachtungen zunächst durch in bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem (x', y, z), das bezogen auf das ungestörte Medium ruht. Die ein-

[1] *Ellenberger* und *C. Schmieden*, Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 193.
[2] *Theodorsen*, NACA-Bericht Nr. 496.
[3] *L. Schwarz*, Luftfahrt-Forsch. 17 (1940), S. 379.
[4] *Söhngen*, Luftfahrt-Forsch. 17 (1940), S. 401.

fachste Elementarlösung der Differentialgleichung (1a) ist das Potential einer ruhenden Punktquelle.

$$\varphi_P = \frac{1}{r} f(ct - r) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{(x' - x_1')^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Darin bedeutet f eine beliebige beschränkte Funktion. Das Quellzentrum liegt bei (x_1', y_1, z_1). Eine Linienbelegung solcher Quellpunkte ist ein Quellfaden. Wir denken uns im Zeitpunkt $t = t_1$ einen beidseitig unendlich langen Quellfaden konstanter Stärke 1/2 auf der z-Achse aufgelegt. Das zugehörige Potential hängt nicht von z ab. Mit

$$z_0 = \sqrt{c^2 (t - t_1)^2 - x'^2 - y^2}$$

findet man dafür den Ausdruck

$$\varphi' (x', y, t - t_1) = \frac{1}{2} \int_{-z_0}^{+z_0} \frac{dz}{\sqrt{x'^2 + y^2 + z^2}} = \ln \frac{c (t - t_1) + \sqrt{c^2 (t - t_1)^2 - x'^2 - y^2}}{\sqrt{x'^2 + y^2}},$$

$$\varphi' (x', y, t - t_1) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x'^2 + y^2 > c^2 (t - t_1)^2.$$

Daraus findet man durch Differentiation das Potential eines Dipolfadens.

$$\varphi_D' (x', y, t - t_1) = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{y c (t - t_1)}{(x'^2 + y^2) \sqrt{c^2 (t - t_1)^2 - x'^2 - y^2}},$$

$$\varphi_D' (x', y, t - t_1) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x'^2 + y^2 > c^2 (t - t_1)^2.$$

Wir gehen jetzt auf ein Koordinatensystem über, das sich in bezug auf das ungestörte Medium mit der konstanten Geschwindigkeit $v < c$ in negativer Richtung der x'-Achse bewegt. Es sei also

$$x = x' + v (t - t_1),$$

$$\varphi_D (x, y, t - t_1) \equiv \varphi_D' (x - v (t - t_1), y, t - t_1).$$

Es ist demnach φ_D das Potential eines ebenen Dipols, der im Zeitpunkt $t = t_1$ spontan an der Stelle $(x = 0, y = 0)$ entsteht und dann in bezug auf das Koordinatensystem (x, y) mit der Geschwindigkeit v nach rechts abschwimmt.

Wir denken uns jetzt im Zeitpunkt $t = \tau$ anfangend laufend solche Dipole im Koordinatenursprung entstehen und nach rechts abschwimmen. Das Potential dieser Dipolbelegung ist

$$\varphi_w (x, y, t - \tau) = v \int_{\tau}^{t} \varphi_D (x, y, t - t_1)\, dt_1.$$

Da φ_D in einem gewissen Außenbereich identisch Null ist, findet man mit der Substitution

$$\xi = v (t - t_1)$$

und der Abkürzung

$$a = -\frac{v^2 x}{c^2 - v^2} + \frac{v}{c^2 - v^2} \sqrt{c^2 x^2 + (c^2 - v^2) y^2} \tag{2}$$

den Ausdruck

$$\varphi_w (x, y, t - \tau) = \int_{a}^{v (t - \tau)} \frac{y \xi}{[(x - \xi)^2 + y^2] \sqrt{\xi^2 - \frac{v^2}{c^2} [(x - \xi)^2 + y^2]}}\, d\xi$$

Das Integral läßt sich berechnen. Es ist, wie man durch Differentiation nach $\eta = v (t - \tau)$ leicht bestätigen kann,

$$\varphi_w = \operatorname{arc\,tg} \frac{y \sqrt{v^2 (t - \tau)^2 - \frac{v^2}{c^2} \{[x - v (t - \tau)]^2 + y^2\}}}{y^2 + x [x - v (t - \tau)]}, \tag{3a}$$

$$\varphi \equiv 0 \quad \text{für} \quad (c^2 - v^2) (t - \tau)^2 + 2 v x (t - \tau) - x^2 - y^2 < 0. \tag{3b}$$

Für das inkompressible Medium erhält man daraus für $t \geq \tau$

$$\lim_{c \to \infty} \varphi_w = \operatorname{arc\,tg} \frac{y v (t - \tau)}{y^2 + x [x - v (t - \tau)]} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x - v (t - \tau)}{y}. \tag{4}$$

Das ist der bekannte Potentialausdruck für einen am Orte ($x = 0$, $y = 0$) gebundenen Wirbel und seinem zugehörigen mit der Strömungsgeschwindigkeit v fortschwimmenden Anfahrwirbel. Der Ausdruck (3a) ist also das Analogon dazu für das kompressible Medium. Eine Aufspaltung von (3a) in zwei Summanden ist nicht wie in (4) derart möglich, daß der eine Summand nur den gebundenen, der andere nur den freien Wirbel darstellt. Im Kompressiblen ist also das Wirbelpaar eine untrennbare Einheit.

Wir wollen noch die Potentialfunktion φ_w für sehr kleine Entfernungen von den beiden Wirbelzentren angeben. Dazu entwickeln wir den Wurzelausdruck in (3a) zuerst für sehr kleine Werte von x und y:

$$\varphi_w = \operatorname{arc\,tg} \frac{y\,v\,(t-\tau)\sqrt{\frac{c^2-v^2}{c^2}} + \frac{y\,x\,v^2}{c\sqrt{c^2-v^2}} + \cdots}{y^2 + x\,[x - v\,(t-\tau)]}$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y\sqrt{\frac{c^2-v^2}{c^2}}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x - v\,(t-\tau)}{y\sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2}}} + \cdots \quad \text{für} \quad \sqrt{x^2+y^2} \ll \begin{cases} v\,(t-\tau) \\ (c-v)\,(t-\tau) \end{cases}$$

Der erste Summand stellt einen gebundenen Wirbel dar, der, wie es der Fall sein muß, nach der Prandtlschen Regel verzerrt ist. Der zweite Summand ist der Potentialanteil am Orte des gebundenen Wirbels, der vom freien Wirbel herrührt. Für kleine Entfernungen vom Zentrum des freien Wirbels findet man, wenn man alle unwesentlichen Terme fortläßt,

$$\varphi_w = -\operatorname{arc\,tg} \frac{x - v\,(t-\tau)}{y} + \cdots \quad \text{für} \quad \sqrt{[x - v\,(t-\tau)]^2 + y^2} \ll v\,(t-\tau)\,. \tag{5b}$$

Das ist der Potentialausdruck für einen nicht verzerrten freien Wirbel.

Für die vorgesehene Randwertaufgabe müssen wir noch die auf der x-Achse vorhandene Geschwindigkeitskomponente w_1 in y-Richtung kennen, die von dem Wirbelpaar erzeugt wird:

$$w_1(x) = \lim_{y \to 0} \frac{\partial \varphi_w}{\partial y} = \frac{\sqrt{v^2\,(t-\tau)^2 - \frac{v^2}{c^2}[x - v\,(t-\tau)]^2}}{x\,[x - v\,(t-\tau)]}\,, \tag{6}$$

$$w_1(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad c^2\,(t-\tau)^2 - [x - v\,(t-\tau)]^2 < 0\,.$$

Wir sehen, daß der „Abwind" zwei Pole erster Ordnung aufweist, von denen einer am Orte des gebundenen, der andere am Orte des freien Wirbels liegt.

Wir wollen noch die am Orte des gebundenen Wirbels wirkende Auftriebskraft berechnen. Dazu benötigen wir die Druckfunktion Π, die den Druckunterschied zwischen dem örtlichen Druck und dem Normaldruck im Unendlichen angibt. Es gilt

$$\Pi\,(x, y, t) = -\varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_w\,. \tag{7a}$$

Darin ist ϱ die Dichte des ungestörten Mediums. Wir setzen zur Abkürzung $t - \tau = t'$ und erhalten

$$-\frac{1}{\varrho}\,\Pi = \frac{y\left[v t' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + x \frac{v^2}{c^2}\right]}{\left[x^2 + y^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]\sqrt{t'^2 - \frac{1}{c^2}\left[(x - v\,t')^2 + y^2\right]}}\,, \tag{7b}$$

$$\Pi \equiv 0 \quad \text{für} \quad c^2 t'^2 - (x - v t')^2 - y^2 < 0\,.$$

Die Druckfunktion besitzt, wenn man von dem Grenzkreis des Bereiches

$$c^2 t'^2 - (x - v\,t')^2 - y \geq 0$$

absieht, nur am Orte des gebundenen Wirbels ($x = 0$, $y = 0$) eine Unstetigkeit. Es kann deshalb nur an dieser Stelle eine Auftriebskraft wirken. Wir bezeichnen diese Auftriebskraft mit A_1 und berechnen sie in üblicher Weise wie folgt:

$$A_1 = \lim_{y = |y| \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\Pi\,(x, y, t) + \Pi\,(x, -y, t)]\,dx\,.$$

Darin ist $\varkappa$ eine beliebige, aber feste positiv reelle Zahl. Mit $x = u|y|$ findet man

$$A_1 = 2\varrho v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{u^2+1-\frac{v^2}{c^2}}\, du = 2\pi\varrho v\,, \tag{8}$$

$$A_1 = 0 \quad \text{für} \quad t < \tau.$$

Nachdem das Wirbelpaar entstanden ist, wirkt also am Orte des gebundenen Wirbels eine Auftriebskraft, die unabhängig von der Lebensdauer des Wirbelpaares ist.

3. Der gebundene Wirbel variabler Auftriebskraft mit seiner freien Wirbelschleppe im kompressiblen Medium. Wir nehmen jetzt an, es entstehen laufend als Funktion der Zeit t Wirbelpaare φ_w, wie sie durch (3) beschrieben sind. Die Belegungsfunktion sei $g(t)$. Der Vorgang beginne im Zeitpunkt $t = -T$. Als Potential dieser Wirbelbelegung findet man, da φ_x in einem gewissen Außenbereich identisch Null ist,

$$\Phi_w(x, y, t) = \int_{-T}^{t-\frac{a}{v}} g(\tau)\, \varphi_w(x, y, t-\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

$$\Phi_w(x, y, t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad t - \frac{a}{v} < -T.$$

Die Größe a ist durch (2) gegeben. Auf Grund von (8) können wir sofort den am Orte des gebundenen Wirbels ($x=0$, $y=0$) wirkenden Auftrieb A des Wirbelsystems (9) angeben:

$$A(t) = 2\pi\varrho v \int_{-T}^{t} g(\tau)\, d\tau\,. \tag{10}$$

Auch die Geschwindigkeitskomponente K in y-Richtung auf der x-Achse können wir mit (6) sofort angeben:

$$K(x, t) = \int_{-T}^{t-\frac{a_0}{v}} g(\tau)\, w_1(x, t-\tau)\, d\tau. \tag{11}$$

Hier ist nach (2)

$$a_0 = -\frac{v^2 x}{c^2 - v^2} + \frac{v c |x|}{c^2 - v^2}\,. \tag{12}$$

Der Auftrieb $A(t)$ ist eine beliebige Funktion der Zeit, da auch $g(t)$ eine beliebige (integrierbare) Funktion ist. Das Wirbelsystem, welches im Punkte ($x=0$, $y=0$) diesen Auftrieb liefert, wird durch (9) beschrieben. Für die vorgesehene Randwertaufgabe müssen wir insbesondere die durch (11) dargestellte senkrechte Geschwindigkeitskomponente auf der x-Achse kennen. Setzt man in (11) den Ausdruck (6) ein, so erhält man mit $t - \tau = \xi$

$$K(x, t) = \int_{\frac{a_0}{v}}^{t+T} g(t-\xi)\, \frac{v\xi}{x(x-v\xi)} \sqrt{1-\left(\frac{x-v\xi}{c\xi}\right)^2}\, d\xi, \tag{13}$$

$$K(x, t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad v(t+T) < a_0.$$

Dieser Ausdruck ist von einer bemerkenswerten Einfachheit. Etwas unhandlicher ist der Potentialausdruck (9), da im Integranden eine relativ komplizierte arc tg-Funktion auftritt. Der Ausdruck (9) ist aber zur Lösung der vorgesehenen Randwertaufgabe nicht unmittelbar erforderlich.

Bemerken wollen wir noch, daß man mit $c \to \infty$ aus (13) den bekannten Ausdruck für den Abwind eines gebundenen Wirbels variabler Intensität mit seiner Schleppe freier Wirbel im Inkompressiblen erhält.

4. Der harmonisch pulsierende gebundene Wirbel mit seiner freien Wirbelschleppe im kompressiblen Medium. Wir machen für die Belegungsfunktion einen harmonischen Ansatz

$$g(t-\xi) = i\omega e^{i\omega(t-\xi)} \tag{14}$$

und erhalten damit aus (13):

$$K(x,t=\frac{i\omega}{x}\,e^{i\omega t}\int\limits_{\frac{a_0}{v}}^{t+T} e^{-i\omega\xi}\,\frac{v\xi}{x-v\xi}\sqrt{1-\left(\frac{x-v\xi}{c\,\xi}\right)^2}\,d\xi.$$

Wir denken uns hier T sehr groß. Das heißt, wir wollen annehmen, das Wirbelsystem sei schon vor sehr langer Zeit ($T\to\infty$) entstanden. Wir betrachten zunächst den Fall $x=-|x|$. Dann liegt auf dem Integrationsweg kein Pol, und man kann schreiben

$$K(x,t)=\frac{i\omega}{x}\,e^{i\omega t}\left[\int\limits_{\frac{a_0}{v}}^{-i\infty}\cdots d\xi-\int\limits_{t+T}^{-i\infty}\cdots d\xi\right],\quad x=-|x|.$$

Der zweite Term stellt für $T\to\infty$ weiter nichts dar als den Abwind eines stationären gebundenen Wirbels. Er interessiert uns im Rahmen unserer Betrachtungen nicht. Wir können ihn durch geeignete Anfangsbedingungen annulliert denken und lassen ihn deshalb in Zukunft immer weg. Es ist dann

$$K(x,t)=-\frac{i\omega}{x}\,e^{i\omega t}\int\limits_{\frac{a_0}{v}}^{-i\infty}\frac{\xi e^{-i\omega\xi}}{\xi-\frac{x}{v}}\sqrt{1-\left(\frac{x-v\xi}{c\xi}\right)^2}\,d\xi\quad\text{für}\quad x=-|x|,\ T\to\infty.\qquad(15a)$$

Wenn $x=+|x|$ ist, liegt auf dem Integrationsweg immer der Pol $\xi=x/v$, da im Falle $v<c$ immer $a_0<x$ ist. Dieser Pol liefert einen besonderen Beitrag zum Integral. Man findet mit derselben Betrachtung wie vorher, und wenn man wieder den vom stationären Wirbel herrührenden Term wegläßt,

$$\left.\begin{aligned}K(x,t)=-\frac{i\omega}{x}\,e^{i\omega t}&\int\limits_{\frac{a_0}{v}}^{-i\infty}\frac{\xi e^{-i\omega\xi}}{\xi-\frac{x}{v}}\sqrt{1-\left(\frac{x-v\xi}{c\xi}\right)^2}\,d\xi\\&-\frac{\pi\omega}{v}\,e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}\quad\text{für}\quad x=+|x|,\quad T\to\infty.\end{aligned}\right|\qquad(15b)$$

Die am Orte des gebundenen Wirbels ($x=0$, $y=0$) wirkende Auftriebskraft können wir nach (14) und (10) sofort angeben. Wir subtrahieren verabredungsgemäß den stationären Term nnd finden

$$A(t)=2\pi\varrho v\left[i\omega\int\limits_{-T}^{t}e^{i\omega\tau}\,d\tau-e^{-i\omega T}\right]=2\pi\varrho v e^{i\omega t}.\qquad(15c)$$

Wir versuchen jetzt, die Ausdrücke (15a) und (15b) auf Integraldarstellungen bekannter Funktionen zurückzuführen. Wir setzen dazu

$$\xi=\frac{-|x|}{c\,(1-M^2)}\,u-\frac{Mx}{c\,(1-M^2)}\quad\text{mit}\quad M=\frac{v}{c}<1$$

und führen noch die Bezeichnung ein

$$K(x,t)=\bar{K}(x)\,e^{i\omega t}.\qquad(16)$$

Damit erhält man

$$\bar{K}(x)=+\frac{|x|}{x}\,\frac{i\omega}{c\sqrt{1-M^2}}\,e^{\frac{i\omega Mx}{c\,(1-M^2)}}\int\limits_{-1}^{i\infty}\frac{\sqrt{u^2-1}}{u+\frac{|x|}{Mx}}\,e^{\frac{i\omega|x|u}{c\,(1-M^2)}}\,du-\pi\,\frac{x+|x|}{2x}\,\frac{\omega}{v}\,e^{-\frac{i\omega x}{v}}.\qquad(17)$$

Beim Wurzelausdruck ist der Wurzelzweig zu wählen, für welchen gilt:

$$\sqrt{u^2-1}\to+u\quad\text{für}\quad u\to\infty.$$

Das Integral in (17) läßt sich weiter umformen. An Stelle von

$$G = \int_{-1}^{i\infty} e^{ik\,u}\,\frac{\sqrt{u^2-1}}{u \pm \dfrac{1}{M}}\,du \quad \text{mit} \quad k = +|k|$$

kann man nämlich schreiben

$$G = -\int_{-1}^{i\infty} \sqrt{u^2-1}\; e^{ik\,u} \int_{0}^{\mp\infty} e^{\zeta\left(u \pm \frac{1}{M}\right)}\,d\zeta\,du\,.$$

Das Integral über ζ existiert für alle Werte von u, für die z. B. gilt

$$-\frac{1}{M} < Re\,[u] < +\frac{1}{M}\,.$$

Man kann in der Tat bei der Integration in der u-Ebene den Weg so von -1 nach $i\infty$ führen, das diese Bedingung auf dem ganzen Wege erfüllt ist (da $M<1$ ist). Dann kann man, wie sich zeigen läßt, die Reihenfolge der Integration vertauschen. Das Integral über u ist eine bekannte Integraldarstellung der Hankelfunktionen. Man findet

$$G = -\frac{\pi i}{2} \int_{0}^{\mp\infty} e^{\pm\frac{\zeta}{M}}\,\frac{H_1^2\,(k - i\zeta)}{k - i\zeta}\,d\zeta\,.$$

Mit $k - i\zeta = k\alpha$ erhält man

$$G = +\frac{\pi}{2}\,e^{\mp\frac{ik}{M}} \int_{1}^{\infty} \frac{H_1^2\,(k\,\alpha)}{\alpha}\,e^{\pm\frac{ik\alpha}{M}}\,d\alpha\,,$$

wenn man beachtet, daß man den Weg statt nach $1 \pm i\,\infty$ auch nach $+\infty$ führen darf. Man kann also an Stelle von (17) auch schreiben

$$\bar{K}(x) = \frac{x}{|x|}\,\frac{i\pi\omega\,e^{-\frac{i\omega x}{v}}}{2c\sqrt{1-M^2}} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\,H_1^2\left[\frac{\omega\,|x|\,\alpha}{c\,(1-M^2)}\right] e^{\frac{i\omega x\alpha}{v(1-M^2)}}\,d\alpha - \frac{x+|x|}{2x}\,\pi\,\frac{\omega}{v}\,e^{-\frac{i\omega x}{v}}\,. \tag{18}$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit bekannten Formeln der Besselfunktionen weiter umformen, was für numerische Rechnungen vorteilhaft sein kann. Nach einigen Umformungen erhält man schließlich

$$\left.\begin{aligned} \bar{K}(x) = {} & \frac{\pi\omega}{2v\sqrt{1-M^2}}\,e^{i\frac{\omega}{v}\frac{M^2 x}{1-M^2}} \left\{ -H_0^2\left[\frac{\omega|x|}{c(1-M^2)}\right] + iM\,\frac{x}{|x|}\,H_1^2\left[\frac{\omega\,|x|}{c(1-M^2)}\right]\right\} \\ & + \frac{i\,\pi\,x\,\omega^2}{2\,v^2\sqrt{1-M^2}}\,e^{-\frac{i\omega x}{v}} \int_{0}^{1} H_0^2\left[\frac{\omega\,|x|\,\alpha}{c(1-M^2)}\right] e^{\frac{i\omega x\alpha}{v(1-M^2)}}\,d\alpha + i\,\frac{\omega}{v}\,e^{-\frac{i\omega x}{v}}\,\ln\frac{M}{1-\sqrt{1-M^2}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Damit kennen wir die auf der x-Achse vorhandene in y-Richtung weisende Geschwindigkeitskomponente eines Wirbelsystems, welches im Koordinatenursprung den Auftrieb

$$A = 2\,\pi\varrho v\,exp\,(i\omega t)$$

erzeugt.

5. Die vom Medium der Schallausbreitung auf die harmonisch schwingende Platte ausgeübten Kräfte. Wir denken uns jetzt eine Belegung der durch Gl. (19) beschriebenen Wirbelsysteme. Die Belegungsfunktion $\gamma(x)$ sei nur im Bereich $-1 \leq x \leq +1$ von Null verschieden. Die dadurch auf der x-Achse erzeugte senkrechte Geschwindigkeitskomponente sei

$$w\,(x,t) \equiv \bar{w}\,(x)\,e^{i\omega t}\,.$$

Dann ist

$$\bar{w}(x) = \int_{-1}^{+1} \bar{K}\,(x - x_1)\,\gamma\,(x_1)\,dx_1\,. \tag{20}$$

Der Belegungsstärke der Wirbel $\gamma(x)$ entspricht nach (15c) die Kraftbelegung

$$p(x,t) = \bar{p}(x) e^{i\omega t} = 2\pi\varrho v \gamma(x) e^{i\omega t}. \tag{21}$$

An Stelle von (20) können wir also auch schreiben

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{2\pi\varrho v} \int_{-1}^{+1} \bar{K}(x - x_1)\, \bar{p}(x_1)\, dx_1 . \tag{22}$$

Das ist, wenn $\bar{w}$ vorgegeben ist, eine Integralgleichung zur Bestimmung der Druckbelegung $\bar{p}(x)$.

Eine beidseitig unendlich lange Platte, deren Vorder- bzw. Hinterkante bei $x = -1$ bzw. $x = +1$ liegt, führe kleine harmonische Schwingungsbewegungen in y-Richtung aus, die durch

$$f(x,t) = \bar{f}(x) e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad |f| \ll 1,\ |f'| \ll 1$$

beschrieben seien. Dadurch wird dem Medium an der Plattenoberfläche der Abwind aufgezwungen

$$w_{pl}(x) e^{i\omega t} = \left| i\omega \bar{f}(x) + v \frac{d}{dx} f(x) \right| e^{i\omega t} . \tag{23}$$

In einer linearisierten Theorie darf man nun annehmen, daß dieser Abwind an der Plattenoberfläche mit dem Abwind auf der x-Achse ($-1 \leq x \leq +1$) identisch ist. Damit ist $w(x)$ durch die Plattenschwingung eindeutig festgelegt, und die auf der Platte wirkende Auftriebsverteilung kann durch die Integralgleichung (22) bestimmt werden. Die Eindeutigkeit der Lösung wird durch die Kuttasche Abflußbedingung [$p(+1) = 0$] gewährleistet.

Man überzeugt sich leicht, daß (22) mit der von *Possio*[1] für dasselbe Problem angegebenen Integralgleichung identisch ist. Damit haben wir mit Hilfe des neueingeführten Wirbelpotentials der kompressiblen Unterschallströmung dasselbe Ergebnis erzielt, das *Possio* ausgehend vom Prandtlschen Beschleunigungspotential gefunden hat. Von der Integralgleichung (22) kennt man außer für den Sonderfall $c \to \infty$ noch nicht die strenge Lösung.

6. Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die bei Strömungsproblemen des inkompressiblen Mediums so erfolgreich angewandte Wirbelmethode auf das kompressible Medium zur Untersuchung von ebenen Schallausbreitungs- und Strömungsvorgängen übertragbar ist. Dazu werden für die Unterschallströmung Geschwindigkeitspotentiale gewisser elementarer Wirbelfelder hergeleitet.

Als erstes wird das Potential eines Wirbelsystems angegeben, das aus einem gebundenen Wirbelzentrum konstanter Auftriebskraft besteht und dem zugehörigen freien Wirbelzentrum, welches mit der Strömungsgeschwindigkeit des Mediums abschwimmt. Im Gegensatz zum Sonderfall des inkompressiblen Mediums läßt sich jedoch der Potentialausdruck nicht in zwei Summanden aufspalten, von denen der eine den gebundenen Wirbel allein und der andere den freien Wirbel (Anfahrwirbel) allein darstellt.

Als nächstes wird das Geschwindigkeitspotential eines gebundenen Wirbelzentrums variabler Auftriebskraft angegeben mit seiner auf der Spur des gebundenen Wirbels liegenden Belegung freier Wirbel.

Als drittes wird ein Sonderfall des zweiten Wirbelsystems untersucht, bei dem die im gebundenen Wirbelzentrum angreifende Auftriebskraft harmonisch mit der Zeit variiert.

Zuletzt wird die praktische Brauchbarkeit dieser „kompressiblen" Wirbelpotentiale erwiesen, indem mit ihrer Hilfe die Integralgleichung für die Druckverteilung einer angeströmten, schwingenden Platte unendlicher Spannweite und endlicher Tiefe hergeleitet wird.

(Eingegangen am 20. April 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Johannes Dörr*, Darmstadt, Steinbergweg 39.

[1] *C. Possio*, Aerotecnica 18 (1938), S. 441.

Beiträge zur Theorie der durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte.

I. Mitteilung.

Von W. Kucharski.

1. Allgemeine Einleitung; kurze Inhaltsangabe. In der folgenden Mitteilung und in den weiteren Mitteilungen II und III zum gleichen Thema wird die bekannte Methode der sogenannten „Störungsrechnung" auf die lineare partielle Differentialgleichung einer durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte angewandt, bei welcher die Auslenkungen quer zur Mittelfläche klein gegenüber der Plattendicke sind, und diese wiederum klein gegenüber den Längen- und Breitenabmessungen der Platte. Abschnitt 2 enthält die notwendigen Einzelheiten über die allgemeine Problemstellung, die zu lösende Differentialgleichung, die benutzten Bezeichnungen u. dgl. In Abschnitt 3 wird die gleichförmig verteilte Schubspannung auch als zeitlich konstant vorausgesetzt und das so entstehende Problem durch geeignete Ansätze gelöst.

Die allgemeinere Aufgabe, welche bei einer periodisch um einen konstanten Wert schwankenden Schubbeanspruchung entsteht, wird in Mitteilung II behandelt werden; dabei kommen nach geeigneter Vorbereitung für die hier vorliegende partielle Differentialgleichung vierter Ordnung einige Gedankengänge und Schlußweisen sinngemäß zur Anwendung, die zur Lösung der analogen gewöhnlichen Differentialgleichung für ein System von einem Freiheitsgrad mit periodisch veränderlicher elastischer Kraft geführt haben. Hieran werden sich einige Ausführungen vergleichender Art bezüglich der verschiedenen Lösungsansätze schließen.

In Mitteilung III soll schließlich die grundlegende Differentialgleichung als Wellengleichung behandelt werden, woraus sich einige verhältnismäßig einfache Lösungen für bisher nicht behandelte Plattenformen und Gesichtspunkte für allgemeinere Aufgaben ergeben.

Mit Ausnahme dieses letzten Abschnittes beziehen sich die Untersuchungen auf rechteckige Platten, an deren Außenkanten die der jeweiligen Aufgabenstellung entsprechenden Schubspannungen als äußere eingeprägte Kräfte angreifen. Die hier entwickelten Methoden lassen sich ohne wesentliche Änderungen auch auf diejenigen Fälle übertragen, in welchen an den Plattenseiten außer den Schubspannungen (oder ohne diese) gleichförmig verteilte Zug- und Druckspannungen angreifen.

Zur näheren Befassung mit den Problemen der Plattentheorie wurde der Verfasser u. a. durch die Bemühungen von Herrn Dipl.-Ing. *Thomas* angeregt, der für das in Abschnitt 3 behandelte Eigenwertproblem einige Rechnungen nach dem *Ritz*schen Verfahren anstellte. Herrn Dr. *Metzmeier* dankt der Verfasser für weitere Anregungen und wertvolle Literaturhinweise, besonders auf die interessante Arbeit von Herrn Dr.-Ing. *Moheit*, „Schubbelastung rechteckiger Platten" (Leipzig 1939), welcher durch Differenzenrechnung und Versuche im großen Maßstab übereinstimmende Eigenwerte und Plattenformen feststellte, während in früher veröffentlichten Arbeiten zum gleichen Problem aufgrund des *Ritz*schen Verfahrens zwar der Eigenwert ohne wesentlichen Unterschied, aber die zugehörige Plattenform mit grundsätzlicher Abweichung (eine anstatt zweier Beulen) angegeben war. Die zitierte Arbeit enthält auch ausführliche Literaturhinweise.

Bezüglich der mathematischen Grundlagen sei z. B. auf die bekannten Bücher von *Courant-Hilbert* und *Frank-Mises* verwiesen; bei der Behandlung des auf eine partielle Differentialgleichung ausgedehnten *Mathieu*schen Problems hat der Verfasser die Kapitel über die entsprechenden Fragestellungen in „*Horn*, Gewöhnliche Differentialgleichungen" benutzt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeiten des Verfassers besteht in der Herausarbeitung allgemeiner Methoden und Gedankengänge für die unmittelbare Lösung der in der Literatur bisher wenig gepflegten partiellen Differentialgleichung der Plattenbewegung; Einzelfälle werden hier lediglich als Beispiele für die Methode behandelt. Weitergehende numerische Berechnungen für die unmittelbare Anwendung befinden sich im Institut des Verfassers in Arbeit; hierüber soll in besonderen Veröffentlichungen zu gegebener Zeit berichtet werden.

2. Problemstellung; Bezeichnungen; die partielle Differentialgleichung. Die rechteckige Platte von der Gesamtdicke h mit den Seitenlängen a und b sei nach Abb. 1 in dem rechtwinkligen (x, y)-System orientiert; die Auslenkungen w ihrer Mittelebene werden in der z-Richtung als positiv gerechnet, die mit den angenommenen x- und y-Richtungen ein rechtshändiges System ergibt. Es sei ϱ die spezifische Masse pro Volumeneinheit, t die Zeit und τ die an den Rändern in den gezeichneten Richtungen in gleichförmiger Verteilung angreifenden Schubspannungen (auf die Flächeneinheit bezogen). Damit ist, wenn τ nicht mit t variiert, ein gleichförmiger Spannungszustand $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ in der gesamten Platte verbunden; das gleiche trifft mit genügender Genauigkeit zu, wenn τ sich mit t genügend langsam ändert, was im folgenden stets vorausgesetzt wird. Ferner sei h genügend klein gegenüber a und b, w genügend klein gegenüber h, so daß die bekannte lineare Plattentheorie gilt. Bezeichnet dann noch $\nu = 1/m$ die Ziffer der Querkontraktion, E den Elastizitätsmodul, und werden partielle Differentiationen nach den Veränderlichen x, y, t in der üblichen Weise durch Indices angedeutet, so lautet die lineare partielle Differentialgleichung für die Auslenkung w bekanntlich

$$\varrho w_{tt} + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \Delta\Delta w + 2\tau w_{xy} = 0 \tag{1}$$

mit

$$\Delta\Delta w \equiv w_{yyyy} + 2\, w_{xxyy} + w_{xxxx} .$$

Führt man neue, dimensionslose Variable ein durch

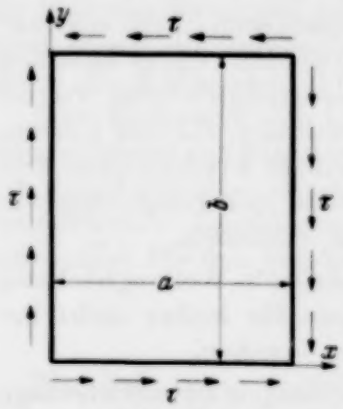

Abb. 1.

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{w}{h_2} , \\ \xi &= \frac{\pi}{a} x , \\ \eta &= \frac{\pi}{a} y , \\ t_1 &= \sqrt{\frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \frac{h^2 E}{a^4 \varrho}}\, t , \end{aligned}\right| \tag{2}$$

und schreibt dann zur Vereinfachung wieder w anstatt w_1, x anstatt ξ, y anstatt η und t anstatt t_1, so erhält man mit

$$\vartheta = \frac{24(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{a^2}{h^2 E} \tau \tag{3}$$

anstatt (1) die grundlegende Differentialgleichung in der Form

$$w_{tt} + \Delta\Delta w + \vartheta w_{xy} = 0 . \tag{4}$$

Hierin kann ϑ eine beliebige Funktion der Zeit sein, mit der einzigen Einschränkung, daß $d\vartheta/dt$ genügend klein ist, daß man also die Massenbeschleunigungen tangential zur Mittelfläche der Platte mit genügender Genauigkeit vernachlässigen kann, wie das im folgenden durchweg geschehen soll.

Gleichung (4) ist unter Berücksichtigung der jeweils gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen bei gegebener Zeitfunktion ϑ zu lösen. Als Randbedingungen kommen für die Anwendung vor allem in Frage:

Ebene Auflage, d. h. $w = 0$ auf dem Rande für alle t (5)

und entweder

vollkommene Einspannung, d. h. $w_x = w_y = 0$ auf dem Rande für alle t (6)

oder

momentenfreie Auflagerung, d. h. $\Delta w = 0$ auf dem Rande für alle t. (7)

Als Anfangsbedingungen, z. B. für $t = 0$, kommen, wie für jedes kinetische Problem, zwei unabhängige Bedingungen in Frage, z. B.

$$\left.\begin{aligned} w(x, y, 0) &= W(x, y) , \\ w_t(x, y, 0) &= V(x, y) , \end{aligned}\right| \tag{8}$$

und

d. h. Lage und Normalgeschwindigkeiten der Plattenpunkte für $t = 0$, gegeben durch die vorgeschriebenen Koordinatenfunktionen W bzw. V.

3. Die Schubspannung τ ist zeitlich konstant. a) Aufspaltung der partiellen Differentialgleichung. In diesem Abschnitt wird τ als zeitlich unveränderlich angenommen; in (4) ist jetzt also

$$\vartheta = \text{konst.} \lesseqgtr 0 . \tag{9}$$

Es werde sofort die Frage nach stehenden Schwingungen gestellt durch den Ansatz

$$w_\varrho = T_\varrho(t)\, U_\varrho(x, y) \quad (\varrho = 0, 1, 2, 3, \cdots) , \tag{10}$$

der in bekannter Weise zu den Differentialgleichungen für U und T führt, nämlich

$$\Delta\Delta\, U_\varrho + \vartheta\, U_{\varrho xy} - \lambda_\varrho\, U_\varrho = 0 \tag{11}$$

und

$$T_\varrho'' + \lambda_\varrho\, T_\varrho = 0 . \tag{12}$$

Gleichung (11) stellt bei gegebenem ϑ und vorgeschriebenen Randbedingungen ein Eigenwertproblem dar mit den Eigenwerten λ_ϱ und den dazugehörigen Eigenfunktionen U_ϱ. Ist dieses gelöst, so liefert (12) sofort die Lösung

$$\left.\begin{aligned} T_\varrho &= A_\varrho \sin \omega_\varrho t + B_\varrho \cos w_\varrho t \\ \omega_\varrho^2 &= \lambda_\varrho . \end{aligned}\right| \tag{13}$$

mit

Eine vollständige Lösung hat hiernach die Form

$$w = \sum_\varrho (A_\varrho \sin \omega_\varrho t + B_\varrho \cos \omega_\varrho t)\, U_\varrho , \tag{14}$$

wobei die Integrationskonstanten A_ϱ und B_ϱ aus (8) zu bestimmen sind, nachdem W und V nach Eigenfunktionen U_ϱ des betreffenden Falles entwickelt sind.

b) Zur Existenz der Lösung. Daß Gleichung (11) für die physikalisch in Frage kommenden Randbedingungen lösbar ist, läßt sich in einer hier genügenden Weise erhärten wie folgt: Zweifellos hat

$$\Delta\Delta\, U + \vartheta\, U_{xy} = p(x, y) \tag{15}$$

eine Lösung, worin p einen beliebig verteilten Normaldruck auf der ruhenden Platte bedeutet. Wird hierbei p so gewählt, daß es außerhalb einer passenden Umgebungsfläche F eines Punktes x_0, y_0 Null ist, und wird dann diese Fläche mit $p \neq 0$ unbegrenzt verkleinert, während $\int_F p\, dF$ einen beschränkten, von Null verschiedenen Wert behält, so ergibt sich in bekannter Weise die Belastung durch eine Einzelkraft im Punkte x_0, y_0. Hierfür existiert also ebenfalls die Lösung. Diese ist linear; die Lösungen für beliebig viele Einzelkräfte entstehen somit durch Superposition und sind unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Einzelkräfte aufgebracht werden. Das gleiche gilt für die potentielle Energie der Platte. Es gelten also die nach *Maxwell* usw. benannten Reziprozitätssätze. Das heißt aber: Zu dem Differentialausdruck

$$L(U) = \Delta\Delta\, U + \vartheta\, U_{xy}$$

existiert eine symmetrische *Green*sche Funktion. Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Integralgleichungen ist damit die Lösbarkeit von (11) sichergestellt. Man könnte daher auch (11) mit Hilfe der zugehörigen Integralgleichung lösen, wenn es gelänge, die *Green*sche Funktion in einer brauchbaren Form aufzustellen. Einige Vorversuche haben jedoch gezeigt, daß dies auch im vorliegenden Falle nicht gerade zu einer Vereinfachung des Problems führt.

c) Sonderfälle, die hier nicht in Frage kommen. Herr Dipl.-Ing. *Thomas* hat bemerkt, daß Gleichung (11) in gewissen, von ihm nicht weiter untersuchten Fällen Lösungen von besonders einfacher Art haben könnte. Schreibt man die Gleichung, in welcher identisch verschwindend U ohne Interesse ist, in der Form

$$\frac{\Delta\Delta U}{U} + \frac{\vartheta\, U_{xy}}{U} - \lambda = 0 , \tag{11a}$$

so werden Möglichkeiten nahegelegt, bei denen die Quotienten

$$a = \frac{\Delta\Delta\, U}{U} \quad \text{und} \quad b = \frac{U_{xy}}{U} \tag{16}$$

von den Koordinaten und von ϑ unabhängig sind. In solchen Fällen wäre dann der Eigenwert

$$\lambda = a + b\vartheta ,$$

also linear in ϑ.

Es ist leicht zu zeigen, daß diese Möglichkeiten nur unter ganz besonderen, stark einschränkenden Voraussetzungen bestehen können, die gerade in den wichtigsten Fällen der Anwendung nicht erfüllt sind. Durch (16) und die Voraussetzung $a_\vartheta = 0$ und $b_\vartheta = 0$ zerfällt nämlich (11) in zwei gleichzeitig zu erfüllende Differentialgleichungen für U, von denen z. B. die eine

$$U_{xy} - bU = 0 \tag{17}$$

lautet. Diese Gleichung muß durch U unter Erfüllung der Randbedingungen befriedigt werden. Wichtig ist vor allem die Randbedingung (5), wonach also die Platte auf ihrem Rande festgehalten wird. Gleichung (17) ist hyperbolisch; sie tritt auch in anderen Problemen der angewandten Mechanik auf und ist in jeder praktisch wichtigen Richtung vollständig erforscht, so daß die Lösung für die Randbedingungen (5) sofort hingeschrieben werden kann. Die Plattenränder, auf denen nach (5) der Wert von U mit Null vorgeschrieben ist, sind nun gerade die Charakteristiken der Differentialgleichung (17), und die bekannte Theorie dieser Gleichung liefert das Ergebnis, daß U mit der Randbedingung (5) im gesamten Gebiet der Platte identisch verschwindet.

In den praktisch wichtigen Fällen der Randbedingung (5) enthalten also die Quotienten a und b nach (16) noch ϑ und im allgemeinen auch die Koordinaten, und von einer linearen Abhängigkeit des Eigenwertes λ von ϑ kann hierbei nicht die Rede sein.

Ob es physikalisch interessante Randbedingungen gibt, bei denen (17) zu erfüllen ist, bleibe hier dahingestellt.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch folgendes vermerkt: Im allgemeinen wird λ_ϱ als Funktion von ϑ durch eine gekrümmte Kurve dargestellt werden. Diese läßt sich für eine genügend kleine Umgebung eines Punktes „immer" mit beliebiger Genauigkeit durch ihre Tangente ersetzen, etwa mit der Gleichung $\lambda = a_1 + b_1\vartheta$. Die hierbei auftretenden „Konstanten" a_1 und b_1 haben aber nichts mit denjenigen nach Gleichung (16) zu tun und sind von Punkt zu Punkt der Kurve $\lambda = \lambda(\vartheta)$ verschieden, also von ϑ abhängig. Der Ersatz dieser Kurve durch ihre Tangente für die Umgebung des Berührungspunktes bedeutet also nicht, daß U in dieser Umgebung angenähert die Differentialgleichung (15) erfüllt.

d) Der „Störungsansatz"; eine besondere Schwierigkeit; zur Konvergenzfrage. Zu brauchbaren Lösungen von (11) gelangt man in an sich bekannter Weise durch einen sogenannten „Störungsansatz" bezüglich des Parameters ϑ von der Form

$$\left.\begin{aligned} \lambda_\varrho &= l_{\varrho 0} + l_{\varrho 1}\vartheta + l_{\varrho 2}\vartheta^2 + l_{\varrho 3}\vartheta^3 + \cdots, \\ U_\varrho &= u_{\varrho 0} + u_{\varrho 1}\vartheta + u_{\varrho 2}\vartheta^2 + u_{\varrho 3}\vartheta^3 + \cdots \end{aligned}\right| \tag{18}$$

In diesen Reihenansätzen nach Potenzen von ϑ sind die l Konstante, die u Fuktionen von x und y. Geht man mit (18) in die zu lösende Gleichung (11), ordnet nach Potenzen von ϑ und setzt den Faktor jeder Potenz von ϑ für sich Null, so entstehen zunächst rein formal die folgenden partiellen Differentialgleichungen, bei welchen der Index ϱ zur Vereinfachung fortgelassen ist:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Delta u_0 - l_0 u_0 &= 0, \\ \Delta\Delta u_1 - l_0 u_1 - l_1 u_0 &= -u_{0xy}, \\ \Delta\Delta u_2 - l_0 u_2 - l_2 u_0 &= -u_{1xy} + l_1 u_1, \\ \Delta\Delta u_3 - l_0 u_3 - l_3 u_0 &= -u_{2xy} + l_1 u_2 + l_2 u_1, \\ \Delta\Delta u_4 - l_4 u_\cdot - l_4 u_0 &= -u_{3xy} + l_1 u_3 + l_2 u_2 + l_3 u_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right| \tag{19}$$

Diese unendlich vielen Gleichungen sind sukzessive zu lösen, wobei jede der Funktionen u für sich die jeweiligen Randbedingungen zu erfüllen hat.

Die erste Gleichung führt auf ein bekanntes Problem: l_0 bzw. u_0 ist offenbar ein Eigenwert bzw. die dazugehörige Eigenfunktion für die schubfreie Platte mit $\vartheta = 0$. Diese Lösungen bei den Randbedingungen (5) mit (6) oder (7) sind bekannt und daher ohne weiteres zu benutzen.

Die weiteren Gleichungen sind inhomogen, mit jeweils bekannten rechten Seiten, während z. B. auf der linken Seite der zweiten Gleichung die Koordinatenfunktion u_1 und die Konstante l_1 unbekannt und zu ermitteln sind. Dies gelingt in der Weise, daß jeweils die rechte Seite ebenso wie die unbekannte Funktion auf der linken nach den Eigenfunktionen der schubfreien Platte entwickelt wird, wobei die zunächst unbekannten Koeffizienten auf der linken Seite sich aus den bekannten der rechten Seite Glied für Glied ergeben. Hierbei bleibt im allgemeinen auf der rechten Seite ein Glied mit der Eigenfunktion u_0 übrig, das dann zur Bestimmung der noch unbekannten Konstanten l führt. Diese ist Null, wenn ein solches Glied auf der rechten Seite nicht erscheint.

Im vorliegenden Falle tritt hierbei noch eine besondere Schwierigkeit auf: Es sei z. B. ein bestimmtes u_0 zugrunde gelegt, welches die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt; u_1 wird dann als Reihe in Eigenfunktionen angesetzt, die ebenfalls die Randbedingungen erfüllen, womit dann die gesamte linke Seite der zweiten Gleichung (19) den Randbedingungen genügt. Der rechts auftretende Ausdruck u_{0yy} wird aber so, wie er nach Differentiation von u_0 entsteht, im allgemeinen die Randbedingungen nicht erfüllen. Der Ausweg aus dieser Schwierigkeit besteht darin, daß das zunächst durch unmittelbare Differentiation entstandene u_{0xx} ebenfalls erst nach Eigenfunktionen, welche für sich die Randbedingungen erfüllen, entwickelt und dann erst rechts eingesetzt wird. Dies könnte zunächst paradox erscheinen und führt auch gegebenenfalls zu Reihen, welche in einem den Rand enthaltenden Gebiet nicht gleichmäßig konvergieren. Diese und andere Einzelheiten werden später an Hand eines Beispieles genauer erörtert.

Vorher sei kurz die Frage nach der Konvergenz des Verfahrens und der damit entstehenden Reihen behandelt. Da die Lösung für $\vartheta = 0$ existiert und man — schon aus physikalisch plausiblen Gründen — Stetigkeit an dieser Stelle in bezug auf ϑ erwarten darf, wird mit Sicherheit ein von Null verschiedener Konvergenzbereich vorliegen. Die Frage nach seiner Erstreckung würde aber zur Beantwortung besonderer Untersuchungen bedürfen, die — soweit dem Verfasser bekannt ist — für derartige Probleme noch nicht allgemein vorliegen und bisher auch von ihm nicht in Angriff genommen wurden. Vom streng mathematischen Standpunkt aus bleibt daher eine wesentliche Lücke offen; aber es darf, wenn nicht zur Entschuldigung so doch zur Erläuterung, darauf hingewiesen werden, daß die Verhältnisse bei manchen anderen Problemen der heutigen mathematischen Physik ganz ähnlich liegen, ohne daß man deswegen die so gewonnenen Lösungen als wertlos ansieht.

Im folgenden wird, wie häufig bei derartigen Aufgaben, angenommen, daß ein gewisser Konvergenzbereich existiert, und sämtliche Aussagen gelten unter der Voraussetzung, daß er nicht überschritten wird, wobei es zum Teil der praktischen Auswertung überlassen bleibt, die Grenze mehr oder weniger bestimmt herauszufinden. Bisherige numerische Auswertungen, die noch nicht abgeschlossen sind, lassen erkennen, daß bei der quadratischen Platte und bei hiervon nicht zu stark abweichenden Seitenverhältnissen der Konvergenzbereich überraschend groß zu sein und sorgar den kritischen Wert von ϑ, der zum ersten Ausbeulen führt, wesentlich zu übertreffen scheint, so daß auch noch negative Werte von λ erfaßt werden. Dies ist physikalisch durchaus plausibel, wenn auch solche Lösungen nach kurzem Zeitverlauf ihren physikalischen Sinn verlieren. Genaueres hierüber sei späteren Arbeiten vorbehalten.

e) Ein Beispiel. Zur Erläuterung der Methode sei kurz die quadratische Platte mit den sogenannten *Navier*schen Randbedingungen (5 und 7) behandelt. Ihre Eigenfunktionen bei $\vartheta = 0$ sind bekanntlich

$$u_{0\,m,n} = \sin m x \sin n y \quad (m, n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{20}$$

oder passende Kombinationen hiervon, mit den Eigenwerten

$$\left.\begin{aligned} l_{0\,m,n} &= (m^2 + n^2)^2 \\ \text{bzw.} \qquad |\omega_{0\,m,n}| &= m^2 + n^2 . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Es sei für die Lösung von (19) von dem tiefsten Eigenwert

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= (1+1)^2 = 4 \\ \text{mit der Eigenfunktion} \qquad u_0 &= \sin x \sin y \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ausgegangen. Die erste der Gleichung (19) wird hierdurch erfüllt. Die zweite Gleichung lautet hiermit

$$\Delta\Delta\, u_1 - 4\, u_1 - l_1 \sin x \sin y = -\cos x \cos y . \tag{23}$$

Durch die rechts stehende Koordinatenfunktion werden offenbar die Randbedingungen nicht erfüllt; sie ist daher als Reihe in den Eigenfunktionen darzustellen. Diese Reihen sind bekannt; es sei z. B. auf *Knopp*, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Auflage, S. 390 verwiesen. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} \cos p x &= \frac{4}{\pi} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\varrho}{\varrho^2 - p^2} \sin \varrho x \quad (\varrho = 1, 3, 5, \ldots), \quad p \text{ gerade} , \\ \cos p x &= \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{\mu}{\mu^2 - p^2} \sin \mu x \quad (\mu = 2, 4, 6, \cdots), \quad p \text{ ungerade} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und gelten mit gleichmäßiger Konvergenz im nicht abgeschlossenen Intervall $0 < x < \pi$. Die Endpunkte sind auszunehmen, da die Funktion $\cos p\,x$ durch die Entwicklung (24) als ungerade Funktion fortgesetzt wird und daher in den Endpunkten unstetig wird. Hierdurch entsteht für die Lösung keine Schwierigkeit. Denn die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung für U werden so bestimmt, daß die Differentialgleichungen (19) auf dem Rande gliedweise erfüllt werden, und die Randbedingungen werden durch U auf dem Rande exakt erfüllt, da die entstehenden Reihen (im Konvergenzbereich bezüglich ϑ) auch noch in den dritten Ableitungen gleichmäßig konvergieren. Eine gewisse Vorsicht ist nur bei Sonderfragen geboten, bei welchen z. B. $\Delta\Delta\, U$ auf dem Rande erfordert wird. Die hierfür durch viermalige Differentiation entstehenden Reihen konvergieren im abgeschlossenen Gebiet nicht mehr gleichmäßig. Für solche wohl selten auftretenden Fragen müßte man sich daher von innen dem Rande beliebig nahe annähern, um den stetigen Anschluß an die Verhältnisse im Innern nicht zu verlieren.

Für die rechte Seite von (23) ist in beiden cos-Funktionen $p = 1$; es ist daher die zweite der Entwicklungen (24), d. h. diejenige nach geraden Vielfachen von x und y zu benutzen. Hiermit entsteht aus (23)

$$\Delta\Delta\, u_1 - 4\, u_1 - l_1 \sin x \sin y = -\frac{16}{\pi^2} \sum_{\mu\,\nu} \frac{\mu\,\nu}{(\mu^2-1)\,(\nu^2-1)} \sin \mu\, x \sin \nu\, y \;(\mu, \nu = 2, 4, 6, \cdots)\,, \quad (25)$$

wobei also μ und ν die vollständige Reihe der positiven ganzen Zahlen unabhängig voneinander zu durchlaufen haben.

Für u_1 ist zunächst der allgemeine Ansatz

$$u_1 = \sum_{m,\,n}{}_1\, a_{m\,n} \sin m\, x \sin n\, y \quad (26)$$

zu machen. Hierin ist sicherlich

$${}_1a_{mn} = 0 \quad \text{für} \quad m, n = 3, 5, 7\,, \cdots,$$

da rechts in (25) keine Glieder mit ungeraden Vielfachen auftreten und die linke Seite, gleich Null gesetzt, höchstens mit $n = m = 1$ erfüllt werden kann. Die Gleichung

$$\Delta\Delta\, u - 4\,\mu = 0 \quad (27)$$

hat nämlich die einzige von Null verschiedene Lösung

$$u = A \sin x \sin y \;(A \text{ beliebig})\,, \quad (28)$$

da 4 der hierzu gehörige Eigenwert ist.

Setzt man daher

$$u_1 = A \sin x \sin y + \sum_{\mu,\,\nu}{}_1\, a_{\mu\nu} \sin \mu\, x \sin \nu\, y\,, \quad (29)$$

so folgt aus (25)

$$A \text{ beliebig}\,, \quad (30)$$

$$l_1 = 0\,, \quad (31)$$

$${}_1a_{\mu\nu} = -\frac{16}{\pi^2} \frac{\mu\,\nu}{[(\mu^2+\nu^2)^2-4]\,(\mu^2-1)\,(\nu^2-1)} \;(\mu, \nu = 2, 4, 6, \cdots)\,. \quad (32)$$

Das Ergebnis (30) bedeutet nichts anderes, als daß zu den entstehenden Lösungen der inhomogenen Gleichung (29) noch beliebige Lösungen der homogenen Gleichung (27) hinzugefügt werden können.

Aus (31) folgt, daß in der Potenzreihe für λ nach (18) das lineare Glied mit ϑ ausfällt; es ist also

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = 0\,. \quad (33)$$

Die nach (32) entstehende Reihe für μ_1 konvergiert so gut, daß sie für Zahlenrechnungen ohne weiteres brauchbar ist; bei konstantem ν gehen die Fourierkoeffizienten wie $1/\mu^5$ nach Null bei $\mu \to \infty$.

Für die dritte der Gleichungen (19) erhält man aus (29)

$$u_{1\,xy} = A \cos x \cos y + \sum_{\mu\nu} \mu\nu\; {}_1a_{\mu\nu} \cos \mu\, x \cos \nu\, y\,.$$

Dies ist wieder nach den Eigenfunktionen unter Benutzung von (24) zu entwickeln und rechts

einzusetzen. Mit (31) geht dann die dritte Gleichung (19) über in

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Delta u_2 - 4\mu_2 - l_2 \sin x \sin y = &- A\frac{16}{\pi^2}\sum_{\mu\nu}\frac{\mu\nu}{(\mu^2-1)(\nu^2-1)}\sin\mu x\sin\nu y \\ &- \sum_{\varrho\sigma}\Big(\sum_{\mu\nu}\mu\nu\ {}_1a_{\mu\nu}\Big)\frac{16}{\pi^2}\frac{\varrho\sigma}{(\varrho^2-\mu^2)(\sigma^2-\nu^2}\sin\varrho x\sin\sigma y \\ &(\varrho,\sigma = 1,3,5,\cdots)\quad(\mu,\nu = 2,4,6,\cdots), \end{aligned}\right| \tag{34}$$

wobei in der letzten Doppelsumme die Reihenfolge der Summationen bereits vertauscht wurde. In dieser Doppelsumme ist mit $\varrho = \sigma = 1$ als erstes Glied dasjenige mit $\sin x \sin y$ enthalten; links hat lediglich das letzte den gleichen Faktor; so erhält man zunächst

$$\left.\begin{aligned} l_2 &= \frac{16}{\pi^2}\sum_{\mu\nu}\frac{\mu\nu}{(\mu^2-1)(\nu^2-1)}\ {}_1a_{\mu\nu} \\ &= -\frac{256}{\pi^4}\sum_{\mu\nu}\frac{\mu^2\nu^2}{[(\mu^2+\nu^2)^2-4](\mu^2-1)(\nu^2-1)} \end{aligned}\right| \tag{35}$$

Von der Summe über ϱ, σ ist hiermit das erste Glied verbraucht; es ergibt mit $l_2 \sin x \sin y$ auf der linken Seite Null. Das erste und zweite Glied links bildet mit der ersten Summe rechts bis auf den Faktor A die für u_1 gelöste Gleichung (25) mit $l_1 = 0$; u_2 enthält also einen additiven Anteil $A u_1$. Ferner ist die zweite Summe rechts zu berücksichtigen, und schließlich ein beliebiger Anteil $B \sin x \sin y$ für den homogenen Ausdruck der linken Seite zu addieren. So entsteht

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= B_{u0} + A u_1 + \sum_{\varrho,\sigma}{}_2a_{\varrho\sigma}\sin\varrho x\sin\sigma y \\ \text{mit}\quad {}_2a_{\varrho\sigma} &= -\frac{\varrho\sigma}{(\varrho^2+\sigma^2)^2-4}\frac{16}{\pi^2}\sum_{\mu\nu}{}'\ {}_1a_{\mu\nu}\frac{\mu\nu}{(\mu^2-\varrho^2)(\nu^2-\sigma^2)}\quad(\varrho,\sigma = 3,5,7,\cdots), \end{aligned}\right| \tag{36}$$

wobei der Strich am Summenzeichen an den Fortfall des Gliedes mit $\varrho = \sigma = 1$ erinnern soll.

In sinngemäß gleicher Weise ist die Rechnung für die weiteren Gleichungen (19) durchzuführen. Man überzeugt sich leicht, daß in diesem Falle stets

$$l_m = 0 \qquad (m \text{ ungerade});$$

in den Potenzreihen nach ϑ kommen also in diesem Spezialfall nur die geraden Potenzen vor.

Wie man bereits aus (36) deutlich ersieht und für die weiteren Gleichungen leicht bestätigt, führt die jeweilige Hinzufügung von homogenen Lösungen mit unbestimmten Koeffizienten zu nichts anderem, als daß die Lösungen von (11) nur bis auf einen beliebigen Faktor bestimmt sind. Die Allgemeinheit wird also nicht eingeschränkt, wenn von vornherein

$$A = B = 0 \tag{36}$$

gesetzt und die allgemeine Vorschrift eingeführt wird, daß Lösungen der jeweiligen homogenen Differentialausdrücke auf den linken Seiten der Gleichungen (19) zu den in der angegebenen Weise resultierenden Lösungen der vollständigen Gleichungen in keinem Falle hinzugefügt werden sollen.

Die Funktionen $U\varrho$ nach Gleichung (11) sind damit für den hier behandelten Sonderfall vollkommen bestimmt.

Für dasjenige $U\varrho$, das sich in der skizzierten Weise aus der Grundfunktion $u_0 = \sin x \sin y$ ergibt, sind in Tabelle 1 die Werte der ersten Reihenkoeffizienten ${}_ma_{\mu\nu}$ bzw. ${}_na_{\varrho\sigma}$ angegeben, wie sie von Herrn Dipl.-Ing. *Erlenwein* in Vervollständigung der ersten Ziffernrechnungen des Verfassers mit durchaus erträglicher Rechenarbeit ermittelt wurden. Für den zugehörigen Eigenwert λ ergibt sich daraus die Reihe

$$\lambda = 4 - 9{,}146\cdot 10^{-3}\,\vartheta^2 - 5{,}28\cdot 10^{-6}\,\vartheta^4 - 3{,}57\cdot 10^{-9}\,\vartheta^6\cdots. \tag{37}$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich hieraus der erste Wert von ϑ, bei welchem die Platte ausbeult, zu

$$\vartheta_{kritisch} = 18{,}71\,. \tag{38}$$

Der bisher veröffentlichte, nach dem *Ritz*schen Verfahren ermittelte Wert ist 18,72.

Damit ist das Problem für die tiefste Eigenfrequenz der durch ϑ verzerrten Platte vollständig gelöst.

Tabelle 1. ${}_1a_{\mu\nu} \cdot (-10^{-5})$.

μ \ ν	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	1200.8437	72.7784	11.6085	2.9705	1.0096	0.4141	0.1940	0.1003	0.0560
4	72.7784	11.3021	2.7448	0.8583	0.3246	0.1417	0.0691	0.0367	
6	11.6085	2.7448	0.9197	0.3530	0.1518	0.0720	0.0371		
8	2.9705	0.8583	0.3530	0.1596	0.0773	0.0399			
10	1.0096	0.3246	0.1518	0.0773	0.0414				
12	0.4141	0.1417	0.0720	0.0399					
14	0.1940	0.0691	0.0371						
16	0.1003	0.0367							
18	0.0560								

${}_2a_{\varrho,\sigma} \cdot 10^{-6}$.

ϱ \ σ	1	3	5	7	9	11	13	15
1	—	−150.354	−11.596	−2.066	−0.572	−0.206	−0.088	−0.04
3	−150.354	+ 73.409	+10.454	+2.326	+0.714	+0.272	+0.122	+0.060
5	− 11.596	+ 10.454	+ 2.725	+0.828	+0.299	+0.126	+0.070	
7	− 2.066	+ 2.326	+ 0.828	+0.320	+0.135	+0.064		
9	− 0.572	+ 0.71	+ 0.28	+0.13	+0.06			
11	− 0.200	+ 0.28	+ 0.13	+0.06				
13	− 0.08	+ 0.14	+ 0.06					
15	− 0.04	+ 0.06						

${}_3a_{\mu,\nu} \cdot 10^{-6}$.

μ \ ν	2	4	6	8
2	−8.17	+0.96	+0.14	+0.03
4	+0.96	−0.04	−0.01	
6	+0.14	−0.01		
8	+0.03			

${}_4a_{\varrho,\sigma} \cdot 10^{-6}$.

ϱ \ σ	1	3	5	7
1	—	−0.110	−0.003	−0.0005
3	−0.110	+0.079	+0.004	+0.0009
5	−0.003	+0.004	+0.0003	
7	−0.0005	+0.0009		

${}_5a_{\mu,\nu} \cdot 10^{-9}$.

μ \ ν	2	4	6	8
2	−5.73	+0.97	+0.11	+0.02
4	+0.97	−0.16	−0.03	
6	+0.11	−0.03		
8	+0.02			

Auf Ergebnisse für die höheren Eigenwerte und die dazugehörigen Plattenformen sowie auf gewisse Eigentümlichkeiten, die sich bei der erweiterten Rechenarbeit ergeben, soll später in besonderen Arbeiten eingegangen werden.

Hier sei noch darauf hingewiesen, daß mit den Eigenwerten eines Problems auch seine *Green*sche Funktion $K(\xi, \eta, x, y)$ gegeben ist, das bedeutet für die physikalische Anwendung die statische Auslenkung, die von einer konzentrierten, an der Stelle ξ, η aufgebrachten Normalkraft an der Stelle x, y hervorgerufen wird. Nach bekannten mathematischen Sätzen ist

$$K(\xi, \eta, x, y) = \sum_{\varrho}' \frac{U_\varrho(\xi, \eta)\, U_\varrho(x, y)}{\lambda_\varrho}. \tag{39}$$

Auch dieses Problem ist durch die hier entwickelte Methode im Konvergenzbereich gelöst.

Schließlich sei vermerkt, daß U_ϱ durch den Ansatz (18) als Potenzreihe in ϑ geliefert wurde, mit den Koordinatenfunktionen $u_{\varrho m}$ als Koeffizienten. Im Konvergenzbereich ist Umordnung erlaubt, z. B. nach $\sin m x \sin n y$, so daß U_ϱ dann als Fourierreihe in den Eigenfunktionen der unbelasteten Platte erscheint. Hierbei sind die Koeffizienten Potenzreihen in ϑ.

f) In dem kurz behandelten Beispiel des vorhergehenden Abschnittes ergab sich $d\lambda/d\vartheta = 0$ für $\vartheta = 0$. Dies gilt aber nicht allgemein. So findet man z. B. nach der angegebenen Methode, daß durch den Punkt $\vartheta = 0$, $\lambda = l_0 = 25$ drei Kurven $\lambda(\vartheta)$ hindurchgehen:

a) eine mit $\lambda'(0) = -\frac{64}{9\pi^2}$ für $u_0 = \sin x \sin ly + \sin lx \sin y$,

b) eine mit $\lambda'(0) = +\frac{64}{9\pi^2}$ für $u_0 = \sin x \sin ly - \sin lx \sin y$,

c) eine mit $\lambda'(0) = 0$ für $u_0 = \sin x \sin ly$ und für $u_0 = \sin lx \sin y$.

Alle diese Möglichkeiten haben physikalische Bedeutung. Zur Veranschaulichung sei erwähnt, daß z. B. u_0 nach a) als Knotenlinie die Diagonale vom Punkte a, 0 nach dem Punkte 0, b hat, dagegen u_0 nach b) diejenige von 0,0 nach a, b. Der Übergang von a auf b bedeutet also eine Drehung der Knotenlinie um $\pi/2$. Dem Übergang von ϑ auf $-\vartheta$ entspricht aber eine Drehung des Schubspannungspaares um $\pi/2$. Geschieht beides gleichzeitig, was einem Übergang von a) auf b) und von ϑ auf $-\vartheta$ entspricht, so muß $\lambda(\vartheta)$ eine gerade Funktion, $\lambda'(0) \neq 0$ demnach unstetig sein. Geht man dagegen innerhalb von a) oder von b) von $+\vartheta$ auf $-\vartheta$ über, so bleibt $\lambda'(0)$ stetig.

Da hiernach $\lambda'(0) > 0$ durchaus vorkommen kann, so wird die Platte nicht immer durch $\vartheta > 0$ im Sinne eines verkleinerten Eigenwertes „weicher" gemacht, wie es bei $u_0 = \sin x \sin y$ und ähnlichen einfachen Grundfunktionen der Fall ist.

(Eingegangen am 8. Mai 1950.)

Anschrift des Verfassers: Professor *W. Kucharski*, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 34.

Beiträge zur Theorie der durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte.

II. Mitteilung.

Von W. Kucharski.

1. Periodische Schubbelastung; das Mathieusche Problem bei einer partiellen Differentialgleichung. a) Die zu lösende partielle Differentialgleichung. In der folgenden Mitteilung II wird unter Hinweis auf die allgemeinen Problemstellungen und Grundlagen der im gleichen Heft dieser Zeitschrift veröffentlichten Mitteilung I zum gleichen Thema die Schubspannung τ als periodische Funktion der Zeit angenommen, die um einen konstanten Mittelwert pulsiert. Die technische Wichtigkeit dieser Problemstellung liegt auf der Hand. Mit

$$\vartheta = \Theta + \vartheta_0 \sin \omega t \tag{1}$$

geht die grundlegende Differentialgleichung (4) von Mitteilung I über in

$$w_{tt} + \Delta\Delta w + (\Theta + \vartheta_0 \sin \omega t)\, w_{xy} = 0. \tag{2}$$

Hierin sind bis auf weiteres Θ, δ_0 und ω beliebige reelle Konstante mit der einzigen Einschränkung bezüglich der Frequenz ω, daß die in der Platte infolge der Schwankungen von τ auftretenden tangentialen Massenbeschleunigungen mit genügender Genauigkeit vernachlässigt werden können. Eine Abschätzung hierfür sei einer besonderen Untersuchung vorbehalten.

b) Der „Störungsansatz; Vorbereitungen zur Lösung der entstehenden Gleichungen. Der übliche Produkten-Ansatz nach Gleichung (10), Abschnitt 3 der Mitteilung I führt hier nicht zum Ziele, wie man nach dem in Teil c) des genannten Abschnitts für eine ähnliche Fragestellung durchgeführten Gedankengang leicht feststellt. Dagegen wird eine Lösung von (2) ermöglicht durch den „Störungsansatz“ nach dem Parameter ϑ_0

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \vartheta_0^m \equiv w_0 + w_1 \vartheta_0 + w_2 \vartheta_0^2 + \cdots, \tag{3}$$

der nach Einsetzen in (2) und Zusammenfassung gleicher Potenzen von ϑ_0 den folgenden Satz von unendlich vielen Differentialgleichungen liefert:

$$w_{0_{tt}} + \Delta\Delta w_0 + \Theta w_{0_{xy}} = 0\,. \tag{4}$$

$$w_{m_{tt}} + \Delta\Delta w_m + \Theta w_{m_{xy}} = -\, w_{m-1_{xy}} \cdot \sin wt \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Gleichung (4) mit $\Theta =$ konst. ist die in Abschnitt 3 der Mitteilung I gelöste Differentialgleichung; man hat also sofort

$$w_0 = \sum_{\varrho=0}^{\infty} (A_\varrho \sin \omega_\varrho t + B_\varrho \cos \omega_\varrho t)\, U_\varrho(x, y), \tag{6}$$

wobei sich U_ϱ aus der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta U_\varrho + \Theta O_{\varrho_{xy}} - \lambda_\varrho U_\varrho = 0 \tag{7}$$

ergibt und $\lambda_\varrho = \omega_\varrho^2$ der Eigenwert von (7) ist, zu welchem U_ϱ bei den vorgeschriebenen Randbedingungen als Eigenfunktion der Platte bei konstanter Schubbelastung Θ gehört. Hiernach sind im folgenden die U_ϱ und λ_ϱ als bekannt anzusehen.

Die Gleichungen (5) sind inhomogen; die rechte Seite wird jeweils durch die vorhergehende Gleichung als bekannte Funktion von x, y, t geliefert; sie sind sukzessive zu lösen. Wird w_0 mit einem Faktor multipliziert, so multipliziert sich damit jedes w_m mit dem gleichen Faktor, und jedes w_m setzt sich linear und additiv aus allen denjenigen Einzelanteilen zusammen, die aus den $U_\varrho \sin \omega_\varrho t$ und den $U_\varrho \cos \omega_\varrho t$ für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$ fließen, wobei jeder dieser Anteile für sich zu bestimmen ist, ohne Zusammenhang mit den zu einem anderen Index ϱ gehörenden Anteilen.

Nun sei ${}_\varrho w_{m1}$ diejenige Funktion, die aus dem w_0-Anteil $U_\varrho \sin \omega_\varrho t$ entsteht,
${}_\varrho w_{m2}$ „ „ „ „ „ „ „ $U_\varrho \cos \omega_\varrho t$ „

dann entsteht für w_m die Form

$$w_m = \sum_\varrho (A_\varrho \cdot {}_\varrho w_{m1} + B_\varrho \cdot {}_\varrho w_{m2}), \tag{8}$$

und für die vollständige Lösung w erhält man:

$$w = \sum_m \vartheta_0^m \sum_\varrho A_\varrho \cdot {}_\varrho w_{m1} + \sum_m \vartheta_0^m \sum_\varrho B_{\varrho\varrho} w_{m2} . \tag{9}$$

Hierin ist im Konvergenzbereich sicherlich die Umordnung erlaubt, die zu

$$w = \sum_\varrho A_\varrho \sum_m {}_\varrho w_{m1} \vartheta_0^m + \sum_\varrho B_\varrho \sum_m {}_\varrho w_{m2} \vartheta_0$$

führt, oder mit

$$\left.\begin{aligned} \sum_m {}_\varrho w_{m1} \vartheta_0^m &= w_{\varrho 1} , \\ \sum_m {}_\varrho w_{m2} \vartheta_0^m &= w_{\varrho 2} \end{aligned}\right| \tag{10}$$

zu der einfachen Form

$$w = \sum_\varrho (A_\varrho w_{\varrho 1} + B_\varrho w_{\varrho 2} . \tag{11}$$

Hierin sind w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} **Einheitsfunktionen**, von denen w_{ϱ_1} aus dem w_0-Antell $U_\varrho \sin \omega_\varrho t$ und w_{ϱ_2} aus dem w_0-Anteil $U_\varrho \cos \omega_\varrho t$ entsteht.

Dabei erfüllt jedes w_{ϱ_1} bzw. w_{ϱ_2} für sich die Differentialgleichung (2) und die von t unabhängingen Bedingungen auf dem Rande, die hier dieselben sein sollen wie in Abschnitt 3 der Mitteilung I.

Die Funktionen ${}_\varrho w_{m1}$ bzw. ${}_\varrho w_{m2}$ werden sich aus den inhomogenen Gleichungen (5) in ähnlicher Weise ergeben, wie die Funktionen u des vorigen Kapitels aus ihren inhomogenen Differentialgleichungen. **Hierfür wird festgesetzt, daß Lösungen der betreffenden homogenen Gleichungen in keinem Fall zu den sich bei dem Integrationsverfahren unmittelbar ergebenden Lösungen hinzugefügt werden sollen.** Dann gilt der Satz:

Die Zeitfunktionen in ${}_\varrho w_{m_1}$ und ${}_\varrho w_{m_2}$ enthalten keine anderen Frequenzen als ω_ϱ und ω. (12)

c) **Einzelheiten zur Herstellung der Lösungen.** Die Lösung der Gleichungen (5) gestaltet sich im einzelnen wie folgt: Für $m=1$ erhält man für ${}_\varrho w_{11}$ bzw. ${}_\varrho w_{12}$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} {}_\varrho w_{11_{tt}} + \Delta\Delta_\varrho w_{11} + \Theta_\varrho w_{11_{xy}} &= -U_{\varrho_{xy}} \sin \omega_\varrho t \sin \omega t = -\frac{1}{2} U_{\varrho_{xy}} \cos (\omega_\varrho - \omega) t \\ &\quad + \frac{1}{2} U_{\varrho_{xy}} \cos (\omega_\varrho + w) t , \\ {}_\varrho w_{12_{tt}} + \Delta\Delta_\varrho w_{12} + \Theta_\varrho w_{12_{xy}} &= -U_{\varrho_{xy}} \cos \omega_\varrho t \sin \omega t = \frac{1}{2} U_{\varrho_{xy}} \sin (\omega_\varrho - \omega) t \\ &\quad - \frac{1}{2} U_{\varrho_{xy}} \sin (\omega_\varrho + \omega) t , \end{aligned}\right| \tag{13}$$

zu deren Lösung offenbar mit Koordinatenfunktionen u, welche die Randbedingungen erfüllen, anzusetzen ist:

$$\left.\begin{aligned} {}_\varrho w_{11} &= {}_\varrho u_{111} \cos (\omega_\varrho - \omega) t + {}_\varrho u_{112} \cos (\omega_\varrho + \omega) t, \\ {}_\varrho w_{12} &= {}_\varrho u_{121} \sin (\omega_\varrho - \omega) t - {}_\varrho u_{122} \sin (\omega_\varrho + \omega) t, \end{aligned}\right| \tag{14}$$

wobei sich die u nach Einsetzen von (14) in (13) in nunmehr bekannter Weise ergeben, und zwar eindeutig, da ein für allemal Lösungen der homogenen Gleichungen nicht hinzuzufügen sind, so daß Satz (12) bestehen bleibt. Bei der Ausrechnung zeigt sich, daß je zwei der Funktionen in (14) einander gleich sind; es sind also nur zwei Koordinatenfunktionen zu bestimmen.

Mit der so gewonnenen Lösung für $m=1$ ist dann die rechte Seite für die Gleichung mit $m=2$ zu bilden; diese selbst ist dann ähnlich wie soeben für $m=1$ skizziert zu behandeln. Bei der Umformung der trigonometrischen Zeitprodukte ergibt sich dabei die zunächst als störend erscheinende Besonderheit, daß rechts Glieder mit $\sin \omega_\varrho t$ bzw. $\cos \omega_\varrho t$ auftreten, so daß dann zusammen mit der linken Seite der sog. Resonanzfall vorzuliegen scheint. Der Ausweg aus

dieser Schwierigkeit, die sonst das gesamte Verfahren sofort stoppen würde, besteht einfach darin, daß die für diesen Fall bekannten stetigen Lösungen mit $t\cos\omega t$ bzw. $t\sin\omega t$ zu benutzen sind. Mit diesen geht dann das Verfahren gesetzmäßig weiter, wobei in den Gleichungen für $m>2$ naturgemäß Glieder mit $t^p\sin\omega t$ bzw. $t^p\cos\omega t$ auftreten mit $p>1$ als ganze Zahlen.

Das Auftreten dieser Potenzprodukte bedeutet nicht etwa, daß die Lösung w mit wachsendem t auf jeden Fall unbeschränkt zunimmt. Es treten unendliche Reihen solcher Funktionen auf, über deren Verhalten zunächst nichts ausgesagt werden kann. Die Untersuchung dieser Frage wird naturgemäß eine der Hauptaufgaben dieser Mitteilung sein. An dieser Stelle des Gedankenganges ist festzuhalten, daß die Funktionen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} in der skizzierten Weise eindeutig und unter Erfüllung von (12) hergestellt werden können und daher für das folgende als gegeben anzusehen sind.

d) Vollständigkeit der angegebenen Lösung. Ist man nun imstande, mit den angegebenen Funktionen die üblichen Anfangsbedingungen eines kinetischen Problems zu lösen, mit anderen Worten: hat der vorgenommene Aufbau und die Durchführung zu einer vollständigen Lösung geführt?

Es seien z. B. Lage $w(0)$ und Geschwindigkeit w_t der Plattenpunkte für $t=0$ als Funktionen der Koordinaten gegeben. Diese und sämtliche sonst auftretende Funktionen seien nach Eigenfunktionen $U_\mu(\mu=0, 1, 2\ldots)$ entwickelt, mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{array}{lllll} & a_\mu, & \alpha_{\varrho_{1\mu}}, & \alpha_{\varrho_{2\mu}}, \\ \text{für} & w(0), & w_{\varrho_1}(0), & w_{\varrho_2}(0) \end{array}\right\}$$

und den Koeffizienten

$$\left.\begin{array}{lllll} & b_\mu, & \beta_{\varrho_{1\mu}}, & \beta_{\varrho_{2\mu}}, \\ \text{für} & w_t(0), & w_{\varrho_{1t}}(0), & w_{\varrho_{2t}}(0). \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Alle diese Koeffizienten sind als bekannt anzusehen.

Andererseits hat die Lösung w die Form (11) mit den A_ϱ und B_ϱ als Integrationskonstanten in der Anzahl 2ϱ.

Setzt man die Entwicklungen mit den Koeffizienten nach (15) in (11) bzw. in den daraus gebildeten Ausdruck für w_t ein, so erhält man für die A_ϱ bzw. B_ϱ den Gleichungssatz

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_\varrho A_\varrho\,\alpha_{\varrho_{1\mu}} + \sum\limits_\varrho B_\varrho\,\alpha_{\varrho_{2\mu}} = a_\mu, \\ \sum\limits_\varrho A_\varrho\,\beta_{\varrho_{1\mu}} + \sum\limits_\varrho B_\varrho\,\beta_{\varrho_{2\mu}} = b_\mu, \end{array}\right\} \quad (\mu=0, 1, 2, 3, \ldots). \qquad (16)$$

Die Menge der μ ist hier die gleiche wie diejenige der ϱ; (24) stellt also 2ϱ lineare inhomogene Gleichungen für die 2ϱ Unbekannten A_ϱ und B_ϱ dar.

Nun ist zwar ϱ unendlich. Man weiß aber, daß derartige unendlich viele Gleichungen bei dem hier in Frage kommenden Aufbau der Koeffizienten einen von Null verschiedenen Konvergenzbereich besitzen, in welchem die Lösungen existieren und z. B. in bekannter Weise durch sukzessive Annäherung od. dgl. mit genügender Genauigkeit bestimmt werden können.

Für diesen Bereich ist dann die angegebene Lösung in dem hier in Frage (17) kommenden Sinn vollständig.

Es ist weiter physikalisch plausibel und wird ohne besonderen Beweis zu unterstellen sein, daß die Lösung auch eindeutig ist.

e) „Stabilität" der Bewegung. Bei der praktischen Anwendung wird man sich nur selten für die Einzelheiten der auftretenden Schwingungen interessieren. In den meisten Fällen wird die Hauptfrage diejenige sein, ob die durch eine Störung eingeleitete Bewegung im Laufe der Zeit beschränkt bleibt (Stabilität), wobei sie periodisch oder in sonstiger Weise mit konstant bleibenden Amplituden verlaufen oder auf Null abklingen kann, oder ob sie mit wachsendem t unbeschränkt anwächst. Diese Hauptfrage kann jetzt für die vorliegende partielle Differentialgleichung beantwortet werden.

Dabei ist alles Bisherige derart formuliert, daß gewisse Schlußweisen, die für die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\ddot{z} + (a + b\sin\omega t)\,z = 0 \qquad (18)$$

bekanntermaßen benutzt werden, auch sinngemäß auf die hier vorliegende partielle Gleichung angewandt werden können. Das Wesentliche hierfür war die von (9) auf (11) führende Umordnung, verbunden mit der Einführung der Einheitsfunktionen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2}, welche den Satz (12) erfüllen.

Nimmt man hierzu die Feststellung (17), so ersieht man, daß von den Einheitsfunktionen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} für ein bestimmtes ω zu einer Lösung auch alles beigetragen wird, was in den Zeitfunktionen die Frequenz ω_ϱ und deren ganzzahlige Vielfache enthält, genauer gesagt, daß alle Anteile, die von den aus $U_\varrho \sin \omega_\varrho t$ bzw. $U_\varrho \cos \omega_\varrho t$ fließenden Funktionen zu einer Lösung beigesteuert werden können, in der Form

$$A_\varrho \cdot w_{\varrho_1} + B_\varrho w_\varrho \tag{19}$$

enthalten sind, wobei A_ϱ und B_ϱ unabhängig voneinander die reellen Zahlen durchlaufen, daß hierin keine anderen ω_ϱ in den Zeitfunktionen auftreten, und daß das jeweilige ω_ϱ in den Zeitfunktionen mit anderem ϱ nicht vorkommt. Zur Beantwortung der Stabilitätsfrage ist also jedes Paar der Einheitsfunktionen mit einem jeweils bestimmten ϱ für sich zu untersuchen, und jedes Paar liefert zur Gesamtlösung einen Beitrag von der Form (19). Hierauf aufbauend ergibt sich folgender Gedankengang:

Die grundlegende Differentialgleichung (12) bleibt ungeändert, wenn man in ihr t durch $t+P$ ersetzt, worin $P = 2\pi/\omega$ die primitive Periode von $\sin \omega t$ bedeutet. Ist daher w eine Lösung von (2), so ist es auch w, wenn $\overline{w}$ aus w dadurch hervorgeht, daß hierin t durch $t+P$ ersetzt wird. Infolgedessen sind auch diejenigen Funktionen $\overline{w}_{\varrho_1}$ und $\overline{w}_{\varrho_2}$ Lösungen, die aus w_{ϱ_1} bzw. w_{ϱ_2} beim Ersatz von t durch $t+P$ hervorgehen.

Durch die Operation: Ersatz von t durch $t+P$ werden ω_ϱ und seine Vielfache, die in w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} vorkommen, nicht geändert, insbesondere nicht in entsprechenden Größen mit anderem Index übergeführt. Das heißt aber: $\overline{w}_{\varrho_1}$ und $\overline{w}_{\varrho_2}$ gehören ebenfalls zu der durch (19) dargestellten Mannigfaltigkeit von Lösungen; sie entstehen aus w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} durch lineare Substitution, so daß

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_{\varrho_1} &= a_{11} w_{\varrho_1} + a_{12} w_{\varrho_2}, \\ \overline{w}_{\varrho_2} &= a_{21} w_{\varrho 1} + a_{22} w_{\varrho_2} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Hierin sind die Koeffizienten Konstante, deren Determinante nicht verschwindet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{21}$$

da die Gleichungen (20) naturgemäß nach w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} auflösbar sind. Ferner sind die Koeffizienten als bekannt anzusehen; denn man hat lediglich die Lösungen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} in der angegebenen Weise zu bestimmen, darin t durch $t+P$ zu ersetzen und die Substitutionskoeffizienten durch Vergleich festzustellen.

Von solchen Substitutionen ist folgendes bekannt: Aus den ursprünglich gegebenen Grundfunktionen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} lassen sich durch eine ganz bestimmte lineare Substitution andere Grundfunktionen w'_{ϱ_1} bzw. w'_{ϱ_2} bilden, derart, daß dann z. B.

$$\overline{w}'_{\varrho_1} = s w'_{\varrho_1}, \quad \text{worin} \quad s = \text{konst.} \tag{22}$$

Diese Konstante ist aus den Koeffizienten einer beliebigen Substitution aus deren sog. Fundamentalgleichung zu bestimmen, welche lautet

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})\, s + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0. \tag{23}$$

Damit ist das Kriterium für die Stabilität der Bewegung gefunden; denn

$$\left.\begin{array}{llll} \text{die Bewegung klingt ab bei} & 0 < |s| < 1, & \text{wenn } s \text{ reell;} \\ \text{,, ,,} \quad \text{wächst an bei} & |s| > 1, & \text{wenn } s \text{ reell;} \\ \text{,, ,,} \quad \text{ist periodisch bei} & s = +1, & \text{mit der Periode } P; \\ \text{,, ,,} \quad \text{ist periodisch bei} & s = -1, & \text{mit der Periode } 2P; \\ \text{,, ,,} \quad \text{bleibt beschränkt bei} & |s| = 1, & \text{wenn } s \text{ komplex.} \end{array}\right\} \tag{24}$$

Dieses Kriterium läßt sich einfacher formulieren. Weiter unten wird gezeigt, daß bei der hier vorliegenden Differentialgleichung (2), in welcher das Glied mit w_t fehlt, stets

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1. \tag{25}$$

Hiermit lassen sich die Wurzeln von (23) auf die Form bringen

$$s_{12} = e^{\pm i 2\pi h} \tag{26}$$

mit

$$\cos 2\pi h = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}); \tag{27}$$

und das Kriterium für Stabilität lautet einfach

$$\left|\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\right| \leq 1. \tag{28}$$

Durch (28) werden bei passender Diagrammdarstellung Kurven bestimmt, welche die Gebiete der Stabilität von denen der Labilität trennen, wie sie z. B. für die gewöhnliche Differentialgleichung (18) in der Physik und Technik als *Strutt*sche Karte bekannt sind. Bei der hier vorliegenden partiellen Differentialgleichung gibt es für jedes ω_ϱ eine solche Karte, im ganzen also einen Atlas mit unendlich vielen Blättern. Weiter unten wird eine solche Karte für einen einfachen Fall entwickelt werden.

f) Zwei Hilfssätze. Die praktische Berechnung der Einzelheiten für das Kriterium wird durch zwei Hilfssätze erleichtert, von denen der eine bereits erwähnt wurde.

1. Die Ermittlung der Grundfunktionen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} ergibt, daß sie sich in der Form

$$\left.\begin{aligned} w_{\varrho 1} &= \sum_P K_p T_{p_1} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots), \\ w_{\varrho 2} &= \sum_P K_p T_{p_2} \end{aligned}\right| \tag{29}$$

schreiben lassen, worin die K_p linear unabhängige Koordinatenfunktionen sind, die in beiden Reihen an der gleichen Stelle auftreten, während die Zeitfunktionen T_p verschieden sind.

Beim Ersatz von t durch $t+P$ werden die Koordinatenfunktionen nicht geändert; dabei entstehen lediglich neue Zeitfunktionen, so daß

$$\left.\begin{aligned} \bar{w}_{\varrho_1} &= \sum_P K_p T_{p_3}, \\ \bar{w}_{\varrho_2} &= \sum_P K_p T_{p_4}. \end{aligned}\right| \tag{30}$$

Andererseits gilt die lineare Substitution (20). Da die K_p linear unabhängig sind, können aus (30), (20) und (29) keine Bedingungsgleichungen für die K_p resultieren; also wird für jedes p

$$\left.\begin{aligned} T_{p_3} &= a_{11} T_{p_1} + a_{12} T_{p_2} = T_{p_1}, \\ T_{p_4} &= a_{21} T_{p_1} + a_{22} T_{p_2} = \bar{T}_{p_2}; \end{aligned}\right| \tag{31}$$

das heißt aber:

Beim Ersatz von t durch $t+P$ erfahren sämtliche Zeitfunktionen in (29), und zwar jede für sich, die gleiche lineare Substitution, wie sie die gesamten Funktionen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} erfahren. (32)

Für die praktische Ausrechnung der Substitutionskoeffizienten erbringt dieser Hifssatz den Vorteil, daß man lediglich diejenigen zwei Zeitfunktionen zu verfolgen hat, die als gemeinsamen Faktor eine passend gewählte Koordinatenfunktion besitzen. Da das Lösungsverfahren mit U_ϱ beginnt, wird man dieses als K_p benutzen. Bei einem bestimmten Rechenaufwand erhält man auf diese Weise beim Abbrechen der Rechnung die größte bis dahin mögliche Vollständigkeit für die Zeitfunktionen und damit für die Substitutions-Koeffizienten.

2. Daß die Determinante in Substitutionskoeffizienten allgemein gleich Eins ist, ergibt sich folgendermaßen: Die Grundlösungen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} stellen für jedes konstant gehaltene Wertepaar x, y, d. h. für jeden Punkt der Plattenmittelfläche, zwei Funktionen der Zeit dar, die stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach der Zeit besitzen und voneinander linear unabhängig sind. Man kann von diesen Funktionen für jedes konstant gehaltene Wertepaar x, y die *Wronski*sche Determinante bilden, die wegen der Unabhängigkeit der Funktionen nicht verschwindet:

$$W(w_{\varrho_1}, w_{\varrho_2}) \equiv \begin{vmatrix} w_{\varrho_1} & w_{\varrho_2} \\ w_{\varrho_1 t} & w_{2t} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{33}$$

Daß w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} außer von t auch noch von x, y abhängen, spielt für das folgende keine Rolle; man kann z. B. x, y als Parameter betrachten, denen man verschiedene Werte beilegen kann, die aber konstant zu halten sind, wenn es allein auf die Abhängigkeit von der Zeit ankommt.

Nach einem bekannten Satz aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (1) gibt es nun eine und nur eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche zwei derartige Funktionen ein Hauptsystem bilden, nämlich

$$\frac{W(w, w_{\varrho 1}, w_{\varrho 2})}{W(w_{\varrho 1}, w_{\varrho 2})} 0 = 0 \tag{34}$$

mit

$$W(w, w_{\varrho_1}, w_{\varrho_2}) \equiv \begin{vmatrix} w & w_{\varrho_1} & w_{\varrho_2} \\ w_t & w_{\varrho_1 t} & w_{\varrho_2 t} \\ w_{tt} & w_{\varrho_1 tt} & w_{\varrho_2 tt} \end{vmatrix} \tag{35}$$

und $W(w_{\varrho_1}, w_{\varrho_2})$ nach (33). Hierin sind $w_{\varrho 1}$ und $w_{\varrho 2}$ die beiden als bekannt anzusehende Funktionen, w die abhängige Variable, bei denen es, wie oben erläutert, hier auf die Abhängigkeit von t ankommt.

Entwickelt man (35) nach der ersten Spalte, so erhält man (34) in der Form

$$w_{tt} - A w_t + B w = 0\,, \tag{36}$$

worin die „Koeffizienten"

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{W(w_{\varrho 1}, w_{\varrho 2})} \begin{vmatrix} w_{\varrho_1} & w_{\varrho_2} \\ w_{\varrho_1 tt} & w_{\varrho_2 tt} \end{vmatrix} \\ \text{und} \\ B &= \frac{1}{W(w_{\varrho 1}, w_{\varrho 2})} \begin{vmatrix} w_{\varrho_1 t} & w_{\varrho_2 t} \\ w_{\varrho_1 tt} & w_{\varrho_2 tt} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

bekannte Funktionen sind.

Nun gilt aber auch die ursprüngliche Differentialgleichung des hier behandelten Problems

$$w_{tt} + \Delta\Delta w + \vartheta(t) w_{xy} = 0. \tag{38}$$

Den beiden Gleichungen (36) und (38) wird Genüge getan mit

$$A = 0 \tag{39}$$

und

$$\Delta\Delta w + \vartheta(t) w_{xy} = B w. \tag{40}$$

Wäre $A \neq 0$, so könnte man durch Subtraktion aus (36) und (38) eine Differentialgleichung erster Ordnung bilden, deren Lösungen u. a. eine lineare Komposition der unabhängigen Funktionen $w_{\varrho 1}$ und $w_{\varrho 2}$ mit beliebigen Konstanten enthalten müßten, so daß z. B. das Anfangsproblem mit gegebener Lage und Geschwindigkeit eines Plattenpunktes lösbar wäre. Das ist ein Widerspruch, also ist $A = 0$.

Die beiden Funktionen w_{ϱ_1} und w_{ϱ_2} bilden also hinsichtlich ihrer Zeitabhängigkeit ein Hauptsystem für eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher das Glied mit dem ersten Differentialquotienten nicht vorhanden ist [nämlich (36) mit $A = 0$].

Hieraus folgt nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Differentialgleichungen

$$W(w_{\varrho_1}\ w_{\varrho_2}) = \text{konst.} \tag{41}$$

und hieraus wieder, daß diese Determinante auch beim Ersatz von t durch $t + P$ ihren Wert nicht ändert:

$$W(\bar{w}_{\varrho_1}\,,\quad \bar{w}_{\varrho_2}) = W(w_{\varrho_1}\,,\quad w_{\varrho_2})\,. \tag{42}$$

Andererseits ist

$$W(\bar{w}_{\varrho_1}, \bar{w}_{\varrho_2}) = W[(a_{11} w_{\varrho_1} + a_{12} w_{\varrho_2})\,,\quad (a_2,\ w_{\varrho_1} + a_{22} w_{\varrho_2})]\,,$$

oder wenn man die rechte Seite hiervon ausrechnet,

$$W(\bar{w}_{\varrho_1}, \bar{w}_{\varrho_2}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} W(w_{\varrho_1}, w_{\varrho_2}). \tag{43}$$

[1] S. hierzu: *Kamke*, Differentialgleichungen reeller Funktionen, S. 25. 1930.

Aus (42) und (43) folgt die Behauptung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1. \tag{44}$$

g) Die für das Stabilitätskriterium maßgebenden Werte bis ϑ^4 einschließlich. Um einen Einblick in die Brauchbarkeit der Methode und die Art des Stabilitäts-Kriteriums zu erhalten, wurde die Rechnung allgemein bis zu den Gliedern mit ϑ_0^4 einschließlich durchgeführt, indem die zu U_ϱ zugehörigen Zeitfunktionen T_{ϱ_1} bzw. T_{ϱ_2} nach der Darstellung (29) ermittelt, darin t durch $t+P$ ersetzt und durch den Vergleich die Substitutionskoeffizienten bestimmt wurden. Das Ergebnis ist folgendes:

Mit den Werten ${}_\varrho d_{1\varrho}$ und ${}_\varrho b_{\varrho 1}$, deren Bestimmung weiter unten dargelegt wird, sind folgende Ziffern definiert:

$$\left.\begin{aligned} \beta_\varrho = \frac{1}{2}\,\frac{{}_\varrho d_{1\varrho}}{\omega_\varrho}\,\vartheta_0^2, \quad \gamma_\varrho = \frac{{}_\varrho d_{1\varrho}^2}{8\,\omega_\varrho^2}\,\vartheta_0^4, \quad \delta_\varrho = 1 + 2\,\frac{{}_\varrho b_\varrho}{{}_\varrho d_{1\varrho}}\,\omega_\varrho, \quad P = \frac{2\pi}{\omega_\varrho}, \quad \chi_\varrho = 2\pi\,\frac{\omega_\varrho}{\omega}, \\ \alpha_1 = 2\pi\left(\frac{{}_\varrho d_{1\varrho}}{\omega\,\omega_\varrho}\right)^2\vartheta_0^4, \quad \alpha_2 = \frac{\pi_\varrho\, d_{1\varrho}}{\omega\, u_\varrho}\,\vartheta_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\,\delta_\varrho\,\frac{{}_\varrho d_{1\varrho}}{\omega_\varrho^2}\,\vartheta_0^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Hiermit ergeben sich die zu U_ϱ gehörenden Zeitfunktionen $T_{\varrho 1}$ und $T_{\varrho 2}$ zu

$$\left.\begin{aligned} T_{\varrho 1} &= \sin\omega_\varrho t + (\beta_\varrho - \delta_\varrho\gamma_\varrho)\,t\cos\omega_\varrho t - \gamma_\varrho\,\omega_\varrho\,t^2\sin\omega_\varrho t + \cdots, \\ T_{\varrho 2} &= \cos\omega_\varrho t - (\beta_\varrho - \delta_\varrho\gamma_\varrho)\,t\sin\omega_\varrho t - \gamma_\varrho\,\omega_\varrho\,t^2\cos\omega_\varrho t + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

ferner die Substitutionskoeffizienten zu

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= (1 - \gamma_\varrho\,\omega_\varrho\,P^2)\cos\chi_\varrho - (\beta_\varrho - \delta_\varrho\gamma_\varrho)\,P\sin\chi_\varrho, \\ a_{12} &= (1 - \gamma_\varrho\,\omega_\varrho\,P^2)\sin\chi_\varrho + (\beta_\varrho - \delta_\varrho\gamma_\varrho)\,P\cos\chi_\varrho, \\ a_{21} &= -a_{12}, \\ a_{22} &= a_{11}, \end{aligned}\right\} \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1). \tag{47}$$

und schließlich das Stabilitätskriterium in der Form

$$w \text{ beschränkt für } t\to\infty \text{ wenn } |\cos 2\pi\,h_\varrho| \equiv |(1-\alpha_1)\cos\chi_\varrho - \alpha_2\sin\chi_\varrho| \leq 1, \tag{48}$$

wobei $\cos 2\pi\,h_\varrho$ stets reell.

Hierin sind noch ${}_\varrho d_{1\varrho}$ und ${}_\varrho b_\varrho$ zu definieren, die sich in folgender Weise ergeben:

1. Es sei

$${}_\varrho D_1 = \frac{1}{2}\,({}_\varrho\mu_{11xy} - {}_\varrho\mu_{12xy}),$$

wobei die Koordinatenfunktionen ${}_\varrho u_{11}$ und ${}_\varrho u_{12}$ zu bestimmen sind aus den inhomogenen Differentialgleichungen

$$\Delta\Delta_\varrho u_{11} + \Theta_\varrho u_{11xy} - (\omega - \omega_\varrho)^2\,{}_\varrho u_{11} = -\frac{1}{2}\,U_{\varrho xy},$$

$$\Delta\Delta_\varrho u_{12} + \Theta_\varrho u_{12xy} - (\omega + \omega_\varrho)^2\,{}_\varrho u_{12} = +\frac{1}{2}\,U_{\varrho xy}.$$

Dann werde ${}_\varrho D_1$ nach Eigenfunktionen U_μ entwickelt:

$${}_\varrho D_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty} {}_\varrho d_{1\mu}\,U_\mu.$$

Hiermit ist

$${}_\varrho d_{1\varrho} = {}_\varrho d_{1\mu} \quad \text{für} \quad \mu = \varrho \tag{49}$$

bestimmt.

2. Es sei

$${}_\varrho V_3 = \frac{1}{2}\,({}_\varrho v_{32xy} - {}_\varrho v_{31xy}),$$

wobei die Koordinatenfunktionen ${}_\varrho v_{32}$ und ${}_\varrho v_{31}$ zu bestimmen sind aus

$$\Delta\Delta_\varrho v_{31} + \Theta_\varrho v_{31xy} - (\omega_\varrho - \omega)^2\,{}_\varrho v_{31} = 2\,(\omega_\varrho - \omega)_\varrho u_{11},$$

$$\Delta\Delta_\varrho v_{32} + \Theta_\varrho v_{32xy} - (\omega_\varrho + \omega)^2\,{}_\varrho v_{32} = 2\,(\omega_\varrho + \omega)_\varrho u_{12}.$$

Dann sei ${}_\varrho V_3$ nach Eigenfunktionen $U_\varkappa$ entwickelt:

$$ {}_\varrho V_3 = \sum_\mu {}_\varrho b_\mu \, U_\mu \, . $$

Hiermit ist

$$ {}_\varrho b_\varrho = {}_\varrho b_\mu \qquad \text{für} \qquad \mu = \varrho \tag{50} $$

bestimmt.

Damit ist das Problem mit der angegebenen Genauigkeit im wesentlichen gelöst. Die ziffernmäßige Durchrechnung bis zum Endergebnis ist naturgemäß umständlich; die in den maßgebenden Ziffern (45) vorkommenden Werte ${}_\varrho d_{1\varrho}$ und ${}_\varrho b_\varrho$ sind komplizierte Funktionen von ω und ω_ϱ mit unendlich vielen Polen und Nullstellen, die ein besonderes Studium erfordern.

h) Ein Beispiel in erster Annäherung. Beschränkt man sich auf Glieder mit höchstens ϑ_0^2 und legt man als ein möglichst einfaches Beispiel die quadratische Platte mit

$$ \Theta = 0, \qquad \vartheta = \vartheta_0 \sin \omega t \tag{51} $$

zugrunde, so vereinfacht sich alles erheblich. Die Eigenfunktionen U_ϱ sind jetzt diejenigen der Platte ohne Schubbelastung am Rande, also die in Mitteilung I bereits benutzten Sinusprodukte. Für die niedrigste Eigenfunktion

$$ U_\varrho = \sin x \sin y \qquad \text{mit} \qquad \lambda_\varrho = 4, \quad \omega_\varrho = 2 \tag{52} $$

seien die Hauptergebnisse mit einer Skizze der dazu führenden Rechnungen und Überlegungen kurz angegeben.

Nach den Ausführungen in Mitteilung I wird

$$ U_{\varrho_{xy}} = \cos x \cos y = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\mu,\nu} \frac{\mu \nu}{(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)} \sin \mu x \sin \nu y \; (\mu, \nu = 2, 4, 6, \ldots). \tag{53} $$

Hiermit sind die Differentialgleichungen für ${}_\varrho \mu_{11}$ und ${}_\varrho u_{12}$ zu lösen, die im vorigen Abschnitt angegeben sind und mit $\Theta = 0$ jetzt folgendermaßen lauten:

$$ \left.\begin{aligned} -(\omega_\varrho - \omega^2)\, {}_\varrho u_{11} + \Delta\Delta \, {}_\varrho u_{11} &= -\frac{1}{2} U_{\varrho_{xy}} , \\ -(\omega_\varrho + \omega)^2 \, {}_\varrho u_{12} + \Delta\Delta \, {}_\varrho u_{12} &= +\frac{1}{2} U_{\varrho_{xy}} . \end{aligned}\right\} \tag{54} $$

Mit

$$ \left.\begin{aligned} {}_\varrho u_{11} &= \sum_{\mu,\nu} \alpha_{1_{\mu\nu}} \sin \mu x \sin \nu y , \\ {}_\varrho u_{12} &= \sum_{\mu,\nu} \alpha_{2_{\mu\nu}} \sin \mu x \sin \nu y \end{aligned}\right\} \tag{55} $$

erhält man die Gleichungen für die α und hieraus

$$ \left.\begin{aligned} \alpha_{1_{\mu\nu}} &= -\frac{8}{\pi^2} \frac{\mu \nu}{[(\mu^2 + \nu^2)^2 - (\omega_\varrho - \omega)^2](\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)} ; \\ \alpha_{2_{\mu\nu}} &= +\frac{8}{\pi^2} \frac{\mu \nu}{[(\mu^2 + \nu^2)^2 - (\omega_\varrho + \omega)^2](\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)} . \end{aligned}\right\} \tag{56} $$

Die für ${}_\varrho D_1$ maßgebende Funktion ${}_\varrho u_{11} - {}_\varrho u_{12}$ sei angesetzt zu

$$ {}_\varrho u_{11} - {}_\varrho u_{12} = \sum_{\mu\,\nu} \beta_{\mu\nu} \sin \mu x \sin \nu y , \tag{57} $$

dann wird mit einfacher Zwischenrechnung

$$ \left.\begin{aligned} \beta_{\mu\nu} &= -\frac{16}{\pi^2} \frac{\mu \nu}{(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)} \frac{1}{a_{\mu\nu} - \dfrac{4\,\omega_\varrho^2 \omega^2}{a_{\mu\nu}}} \\ \text{mit} \qquad a_{\mu\nu} &= (\mu^2 + \nu^2)^2 - (\omega^2 + \omega^2). \end{aligned}\right\} \tag{58} $$

Mit (57) und (58) wird dann

$$ ({}_\varrho u_{11} - {}_\varrho u_{12})_{xy} = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu\nu} \cdot \mu \nu \cos \mu x \cos \nu y , \tag{59} $$

das wieder nach den Eigenfunktionen zu entwickeln ist.

Da μ und ν gerade Zahlen sind, treten jetzt in den Entwicklungen der Cosinus die ungeraden Vielfachen r, σ auf; es wird

$$({}_{\varrho}u_{11} - {}_{\varrho}u_{12})_{xy} = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu\nu}\, \mu\nu \sum \frac{r}{r^2 - \mu^2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 - \nu^2} \sin \nu x \sin \sigma y \; (r, \sigma = 1, 3, 5, \ldots). \qquad (60)$$

Der Index r ist hier an Stelle des früher benutzten ϱ verwendet, um eine Verwechslung mit dem hier anderweitig gebrauchten Index ϱ zu vermeiden.

Damit ist das wesentliche bereits erreicht. Nach dem vorigen Abschnitt ist, wenn hier zur Vermeidung von Verwechslungen ein anderer Summationsindex benutzt wird,

$${}_{\varrho}D_1 = \frac{1}{2}\,({}_{\varrho}u_{11} - {}_{\varrho}u_{12})_{xy} = \sum_{p=0}^{\infty} {}_{\varrho}d_{1p}\, U_p \,.$$

Der gesuchte Koeffizient ${}_{\varrho}d_{1\varrho}$ ist hierin derjenige für $p = \varrho$, die zugrundegelegte Eigenfunktion mit dem Index ϱ ist aber in diesem Beispiel zu $\sin x \sin y$ angenommen; zur Ermittlung von ${}_{\varrho}d_{1\varrho}$ ist also in (60) $r = \sigma = 1$ zu setzen, und man erhält für das gewählte Beispiel

$$\left.\begin{aligned} {}_{\varrho}d_{1\varrho} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \beta_{\mu\nu} \frac{\mu\nu}{(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)} \\ \text{oder} \quad {}_{\varrho}d_{1\varrho} &= -\frac{8}{\pi^2} \sum_{\mu\nu} \left[\frac{\mu\nu}{(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)}\right]^2 \frac{1}{a_{\mu\nu} - \dfrac{4\,\omega_{\varrho}^2\,\omega^2}{a_{\mu\nu}}} \\ \text{mit} \quad a_{\mu\nu} &= (\mu^2 + \nu^2)^2 - (\omega_{\varrho}^2 + \omega^2) \;\; (\mu, \nu = 2, 4, 6 \ldots) \,. \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Bei der Auswertung ist zu beachten, daß $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ usw., so daß die entsprechenden Glieder bei $\mu \neq \nu$ doppelt auftreten.

Damit ist der für das Kriterium (48) notwendige Wert ${}_{\varrho}d_{1\varrho}$ explizite gewonnen. Dieses selbst vereinfacht sich bei Beschränkung auf Glieder mit höchstens ϑ_0^2 erheblich. Mit

$$\left.\begin{aligned} \zeta(\omega) &= -\frac{8}{\pi^2} \frac{1}{{}_{\varrho}d_{1\varrho}} \,, \\ \chi \equiv \chi_{\varrho} &= 2\pi \frac{\omega_{\varrho}}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega} \,, \\ x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta_0 \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

und nach genauer, grundsätzlich einfacher Analyse der verschiedenen Möglichkeiten erhält man für den vorliegenden Fall aus (48) die folgenden maßgebenden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Stabilität liegt vor, wenn} \quad \text{I.} \;\; x^2 \leq \omega\, \zeta(\omega)\, \operatorname{tg} \chi/2 \,, \\ &\text{oder, wenn} \quad \text{II.} \;\; x^2 \leq -\omega\, \zeta(\omega)\, \operatorname{ctg} \chi/2 \,, \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

und zwar in dem Sinne, daß entweder das eine oder das andere Kriterium maßgebend ist; ω ist hierin als positive Größe einzuführen. Da $\operatorname{tg} \chi/2$ und $\operatorname{ctg} \chi/2$ stets gleiches Vorzeichen haben und nur positive Werte von x^2 in Frage kommen, gilt das obere Kriterium, wenn $\zeta(\omega)$ gleiches, das untere, wenn es entgegengesetztes Vorzeichen wie $\operatorname{tg} \chi/2$ bzw. $\operatorname{ctg} \chi/2$ hat. Dabei läuft $\chi/2 = 2\pi/\omega$ von ∞ bis 0, während ω von 0 bis ∞ läuft.

Offenbar ist noch eine Untersuchung der neu auftretenden Funktion $\zeta(\omega)$ notwendig. Schreibt man ${}_{\varrho}d_{1\varrho}$ nach (61) aus, so erhält man

$$-\frac{\pi}{8}\, {}_{\varrho}d_{1\varrho} = \frac{16}{81} \frac{60 - \omega^2}{(60 - \omega^2)^2 - 16\,\omega^2} + \frac{64}{2025} \frac{396 - \omega^2}{(396 - \omega^2)^2 - 16\,\omega^2} + \frac{256}{50\,625} \frac{1020 - \omega^2}{(1020 - \omega^2)^2 - 16\,\omega^2}$$

oder mit der ohne weiteres verständlichen Abkürzung

$$-\frac{\pi}{8}\, {}_{\varrho}d_{1\varrho} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{b_n}{b_n^2 - 16\,\omega^2} \,, \quad \zeta(\omega) = \frac{1}{\sum\limits_n a_n \dfrac{b_n}{b_n^2 - 16\,\omega^2}} \,. \qquad (64)$$

Von besonderer Wichtigkeit sind die Nullstellen von ζ; sie ergeben sich aus (64):

$$\zeta(\omega) = 0 \quad \text{für} \quad b_k^2 - 16\,\omega_k^2 = 0 \,,$$

worin k eine der Ziffern n ist, d. h.

$$\zeta(\omega) = 0 \quad \text{für} \quad [(\mu^2 + \nu^2)^2 - (\omega_k^2 + 4)]^2 - 16\,\omega_k^2 = 0\,,$$

wobei μ, ν die zu dem Reihengliede mit $u = k$ gehörenden geraden Zahlen sind. Die leichte Rechnung liefert

$$\omega_k = \mu^2 + \nu^2 \pm 2 \qquad (\mu, \nu = 2, 4, 6, 8, \ldots) \tag{65}$$

und damit folgende Werte für ω_k:

$$6{,}10;\ 18{,}22;\ 30{,}34;\ 50{,}54;\ 70{,}74;\ 98{,}102;\ \ldots$$

Es entstehen also Gruppen von je zwei Werten, die um 4 verschieden sind; die entsprechenden Werte dieser Zweiergruppen haben dann sukzessive je zweimal die Abstände 12, 20, 28, 36, ... voneinander, wie dies in folgender Darstellung angedeutet ist:

$$\underset{}{6{,}10;}\ \underset{12}{}\ \underset{}{18{,}22;}\ \underset{12}{}\ \underset{}{30{,}34;}\ \underset{20}{}\ \underset{}{50{,}54;}\ \underset{20}{}\ \underset{}{70{,}24;}\ \underset{28}{}\ \underset{}{98{,}102;}\ \underset{28}{}\ \underset{}{\ldots}\ \underset{\ldots}{}$$

Die Unendlichkeitsstellen von $\zeta(\omega)$ ergeben sich nicht in so einfacher Weise; es sind die Nullstellen der in (64) im Nenner stehenden Reihe. Man findet bei näherer Untersuchung, daß dieser Nenner $\Sigma A_{u\nu}$ stets eine Nullstelle zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von ζ hat und daselbst sein Vorzeichen wechselt. Die Lage dieser Stellen muß durch numerische Berechnung festgestellt werden; ihre Bedeutung erscheint bis auf weiteres sekundär, da die vorliegende Untersuchung auf kleine ϑ_0^2 beschränkt ist.

In Abb. 1 dieser Mitteilung ist $\zeta(\omega)$ in Abhängigkeit von ω aufgetragen. Für das weitere ist als Hauptsache festzuhalten, daß für $6 \leq \omega \leq \infty$ die Nullstellen in der dargelegten Weise auftreten, daß aber im Intervall $0 \leq \omega < 6$ keine Nullstellen von ζ vorhanden sind.

Die in den Ungleichungen (63) auftretenden Funktionen tg und ctg haben ihre bekannten mit Vorzeichenwechsel verbundenen Null- bzw. Unendlichkeitsstellen. Da nach (62)

$$\chi/2 = \frac{2\pi}{\omega},$$

so liegt bei wachsendem ω die letzte Unendlichkeitsstelle für $\operatorname{tg} \chi/2$ und die letzte Nullstelle für $\operatorname{ctg} \chi/2$ bei $\omega = 4$; es ist also

$$\left.\begin{aligned} \infty > \ \operatorname{tg} \chi/2 > 0 \\ 0 < \operatorname{ctg} \chi/2 < \infty \end{aligned}\right\} \text{ für } 4 < \omega < \infty. \tag{66}$$

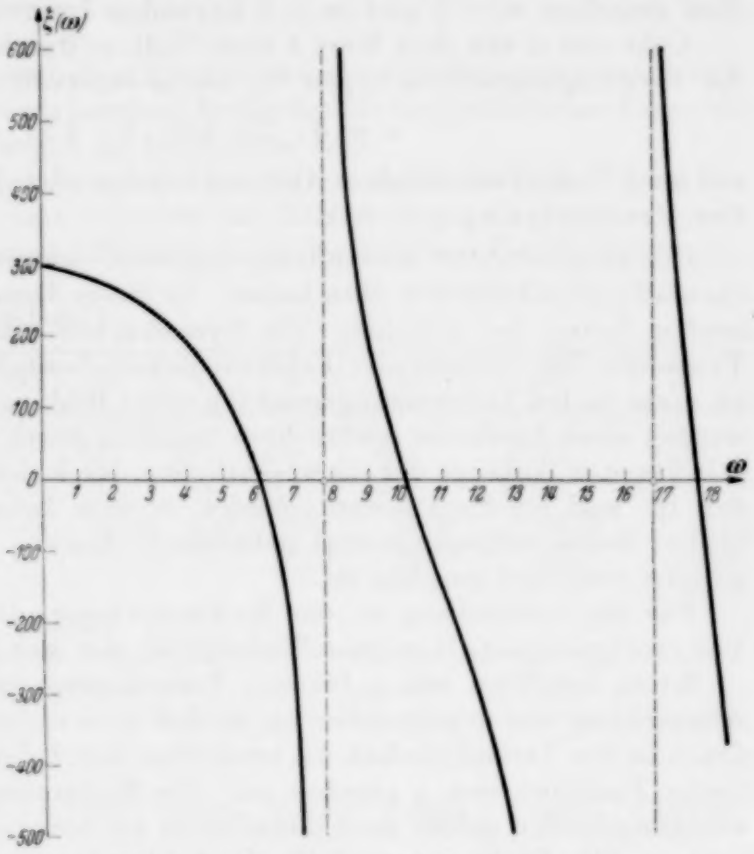

Abb. 1. Die Funktionen $\zeta(\omega)$ für das Beispiel.

Die für das Verhalten der Bewegung für ständig wachsendes t bei von Null bis Unendlich wachsenden, jeweils konstant gehaltenen Werten von ω maßgebenden Kriterien können jetzt vollständig diskutiert werden.

In einer Koordinatenebene mit x^2 oder mit x als Ordinate und mit ω als Abszisse werden durch die Kriterien Gebiete der Stabilität abgegrenzt. Wählt man zunächst für die Darstellung x^2, das hier aus physikalischen Gründen nur positive Werte einschließlich Null haben kann, so liegen die Gebiete der Stabilität in der oberen Halbebene und können sich nach unten höchstens bis zur ω-Achse erstrecken. Man stellt leicht fest, daß die Funktionen tg, ctg und ζ in den jeweils in Frage kommenden Intervallen von ω monoton verlaufen; x^2 als Funktion von ω ist also auf der Grenzkurve bei diesem Grad der Annäherung stets eindeutig. Die ω-Achse stellt daher stets die untere Grenze der Stabilitätsgebiete dar, und nach oben werden diese begrenzt durch die oberen Grenzkurven mit den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \omega\,\zeta(\omega)\,\mathrm{tg}\,\chi/2 \quad \text{im Falle I}, \\ x^2 &= -\,\omega\,\zeta(\omega)\,\mathrm{tg}\,\chi/2 \quad \text{„ „ II}. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Dabei schließen sich, wie man ohne weitere Erläuterung leicht findet, die Intervalle von ω nach Fall I von (63) mit denjenigen nach Fall II lückenlos aneinander; die ω-Achse $x^2=0$ ist also durchweg die untere Grenzkurve für die Stabilitätsgebiete, was hier aus physikalischen Gründen fast selbstverständlich ist, da bei $\vartheta_0=0$ lediglich die freie periodische Eigenschwingung der Platte ohne jede äußere Einwirkung vorliegt.

Funktionentheoretisch sind die Nullstellen der oberen Grenzkurven, also die Stellen für $\zeta\,\mathrm{tg}\,\chi/2=0$ und für $\zeta\,\mathrm{ctg}\,\chi/2=0$ als Verzweigungspunkte der Kurve anzusehen, die sich aus sämtlichen Grenzpunkten des Stabilitätsgebietes ergibt.

Für die Lage dieser Punkte ist im Intervall $6\leq\omega<\infty$ die Funktion ζ maßgebend, deren Nullstellen in den erwähnten, aus je zwei um $\Delta\omega=4$ voneinander entfernten Werten bestehenden Zweiergruppen liegen, wobei der Abstand zweier sukzessiver Gruppen bei unbeschränkt wachsendem ω ebenfalls unbeschränkt anwächst.

Dagegen sind im Intervall $0<\omega<6$ die Nullstellen von $\mathrm{tg}\,\chi/2$ bzw. $\mathrm{ctg}\,\chi/2$ maßgebend. Diese liegen offenbar bei

$$\chi/2=\frac{2\pi}{\omega}=m\,\frac{\pi}{2} \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

d.h. bei $\omega=4/m$, wobei $0\leq\omega\leq4$ für $\infty\geq m\geq1$, während das ganze Intervall $4<\omega<\infty$ dem zwischen $m=1$ und $m=0$ liegenden Intervall von $\chi/2$ entspricht.

Geht also ω von dem Wert 4 nach Null, so durchläuft m die ganzen Zahlen von 1 bis ∞, und die Verzweigungsstellen liegen für dieses Intervall in unendlicher Anzahl bei

$$\omega=4;\ \ 2;\ \ 4/3;\ \ 1;\ \ 4/5;\ \ 4/6;\ \ 4/7;\ \ 4/8;\ \ \ldots$$

mit nach Null abnehmendem Abstand voneinander: Der Nullpunkt ist eine Häufungsstelle der Verzweigungspunkte.

Für die praktische Anwendung empfiehlt sich die Auftragung von $x=\pm\sqrt{x^2}$, da negative x ebenfalls physikalischen Sinn haben. In dieser Darstellung liegen die Gebiete der Stabilität auf beiden Seiten der ω-Achse. Die Grenzkurven schneiden jetzt die ω-Achse mit „vertikaler" Tangente. Die Gebiete der Labilität liegen ebenfalls zu beiden Seiten der ω-Achse und stoßen an diese in den Verzweigungspunkten unter Bildung von spitzen Zwickeln. Im Gebiet $0<\omega\leq4$ werden diese durch die senkrechten Geraden durch die Verzweigungspunkte und die nach links gekrümmten Anfänge der im wesentlichen durch den Verlauf der von Null nach links ansteigenden tg- und ctg-Funktionen gebildet, in dem Intervall $6\leq\omega\leq\infty$ durch je zwei nach den beiden Seiten entgegengesetzt gekrümmte Kurven, deren Verlauf im wesentlichen durch denjenigen von $\zeta(\omega)$ gegeben ist.

Für die Anwendung ist der Krümmungsradius der gekrümmten Grenzkurven an den Verzweigungsstellen von Wichtigkeit, der sich leicht berechnen läßt.

Ist ω_k der Wert von ω für eine Verzweigungsstelle und $\delta\omega$ eine von erster Ordnung kleine Abweichung von ω gegenüber ω_k, so daß $\omega=\omega_k+\delta\omega$, so läßt sich x^2 leicht als linearer Ausdruck in der Veränderlichen $\delta\omega$ herstellen, durch den dann in der Umgebung von ω_k als quadratische Funktion von x gegeben ist. Die Krümmungsradien ϱ_k der Kurven $x(\omega)$ an den Verzweigungsstellen erhält man dann leicht als reziproke Werte der zweiten Ableitungen von $\delta\omega$ nach x. Die Rechnung muß für die beiden Intervalle $0<\omega<6$ und $6\,\omega\leq<\infty$ in verschiedener Weise durchgeführt werden; für das zweitgenannte Intervall erhält man offenbar für jede Stelle zwei Werte, die in ohne weiteres verständlicher Weise mit $\varrho_{k\,\mathrm{rechts}}$ und $\varrho_{k\,\mathrm{links}}$ bezeichnet werden.

Man erhält

$$\varrho_k=\pi\,\frac{\zeta(\omega_k)}{\omega_k} \quad \text{für} \quad 0<\omega_k<6, \tag{68}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{k\,\mathrm{links}} &= 2\,\frac{\omega_k\mp2}{a_k}\,\omega_k\,\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\omega_k}, \\ \varrho_{k\,\mathrm{rechts}} &= 2\,\frac{\omega_k\mp2}{a_k}\,\omega_k\,\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{\omega_k}, \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 6\leq\omega_k<\infty, \tag{69}$$

wobei in (69) die oberen Vorzeichen für den kleineren Wert von ω_k für jede Zweiergruppe der Nullstellen zu nehmen sind, die unteren Vorzeichen für den größeren ω_k-Wert der entsprechenden

Zweiergruppe. Ferner ist

$$a_k = \left[\frac{\mu\nu}{(\mu^2-1)(\nu^2-1)}\right], \tag{70}$$

wobei μ und ν die beiden für die jeweilige Zweiergruppe von Nullstellen maßgebenden geraden Zahlen sind.

Aus (68) ersieht man, daß $\varrho_k \to \infty$ für $\omega \to 0$; die sich nach dem Nullpunkt hin häufenden Stabilitätsgebiete gehen bei Annäherung an den Nullpunkt in Parallelstreifen über, so daß in der Umgebung des Nullpunktes unbeschränkt wachsende ϑ_0 erforderlich wären, um das Stabilitätsgebiet zu überschreiten.

Ein einfacher Überschlag zeigt, daß die Krümmungsradien mit unbeschränkt wachsendem ω_k ebenfalls nach unendlich gehen. Die kleinsten Krümmungsradien treten bei $\omega_k = 6$ und bei $\omega_k = 4$ auf; dies sind also die Stellen, an welchen die Gefahr anwachsender Störungen bei Vergrößerung von ϑ_0 am größten ist.

In unmittelbarer Umgebung von $\omega = \omega_k$ ist für die Grenzkurve

$$x_0 = \sqrt{2\,\varrho_k \delta\omega}\,, \tag{71}$$

worin die Beträge von ϱ_k und $\delta\omega$ einzusetzen sind; aus dieser Beziehung liest man ab, bis zu welchem $x = 2\,\vartheta_0/\sqrt{\pi}$ man bei einem gewissen $\delta\omega$ gehen kann, ohne daß Labilität eintritt. Andererseits ist natürlich auch

$$\delta\omega = \frac{x_0^2}{2\varrho_k}\,. \tag{72}$$

Sind also bei einer Anordnung gewisse Amplituden x_0 einer periodischen Belastung auf Schub zu befürchten, so gibt (72) für jedes ω_k die hier vorhandene Breite $\delta\omega$ für ein gefährliches Intervall von ω, innerhalb dessen anwachsende Störungen zu befürchten sind.

Tabelle 1 gibt die einzelnen kritischen Stellen x_0 bei $\delta\omega = 0{,}1 = \omega_0/20$; in Tabelle 2 ist für dieselben Stellen $\delta\omega$ für $x_0 = 10$ angegeben, was ungefähr die Hälfte ist von derjenigen Randbelastung auf Schub, bei welcher die quadratische Platte bei den *Navier*schen Randbedingungen statisch ausbeult.

Tabelle 1.

ω_k	0,667	0,8	1,0	1,333	2	4	6	10	18	22
$\varrho_{k\ links}$	1358	1127	892	657	417	147	430	883	6622	9 585
$\varrho_{k\ rechts}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	140	1672	50050	113 100
$x_{0\ links}$ bei $\delta\omega = 0{,}1$	52,12	15,01	13,35	11,46	9,13	5,42	9,27	13,29	36,38	43,79
$x_{0\ rechts}$ bei $\delta\omega = 0{,}1$	—	—	—	—	—	—	5,29	18,29	100,5	150,4

Tabelle 2.

ω_k	0,667	0,8	1,0	1,333	2	4	6	10	18	22
$\delta_{\omega\ links}$ für $x_0 = 10$	0,0368	0,0443	0,0561	0,0761	0,1199	0,3400	0,1162	0,0566	0,00755	0,00522
$\delta_{\omega\ rechts}$ für $x_0 = 10$	—	—	—	—	—	—	0,3569	0,0299	0,000999	0,000442

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die kritischen Werte ω_k und diejenigen der Krümmungsradien ϱ_k an den Verzweigungsstellen als genau anzusehen sind, da sie durch korrekte Grenzrechnung für $\vartheta_0^2 \to 0$ ermittelt sind. Bezüglich der mit der hier durchgeführten Annäherung ermittelten auf der ω-Achse senkrechten Asymptoten der Grenzkurven ist im Vergleich zu den entsprechenden Kurven der gewöhnlichen Differentialgleichung vielleicht die Vermutung gestattet, daß sie bei Berücksichtigung genügend vieler höherer Potenzen von ϑ_0 in gekrümmte Kurven übergehen. Auch sei daran erinnert, daß zu jeder Eigenfrequenz ω_ϱ der unbelasteten Platte und der entsprechenden Eigenfunktion Uz eine andere Funktion $\zeta(\omega)$ und damit andere Grenzkurven gehören. Wenn also bei der entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichung die graphische Darstellung häufig als „Karte" bezeichnet wird, so könnte man bei der hier behandelten partiellen Differentialgleichung von einem „Atlas" solcher Karten sprechen, und zwar mit unendlich vielen Blättern.

Abb. 2 dieser Mitteilung zeigt andeutungsweise das erste dieser Blätter, hervorgehend aus der hier annäherungsweise behandelten tiefsten Eigenfrequenz der quadratischen Platte.

Durch dieses Beispiel ist, wenn auch zunächst für den einfachsten Fall und für die einfachsten Randbedingungen, die Anwendbarkeit der angegebenen Methoden erwiesen; die Ergebnisse können bei einer um Null pulsierenden Schubbelastung technisch unmittelbar benutzt werden.

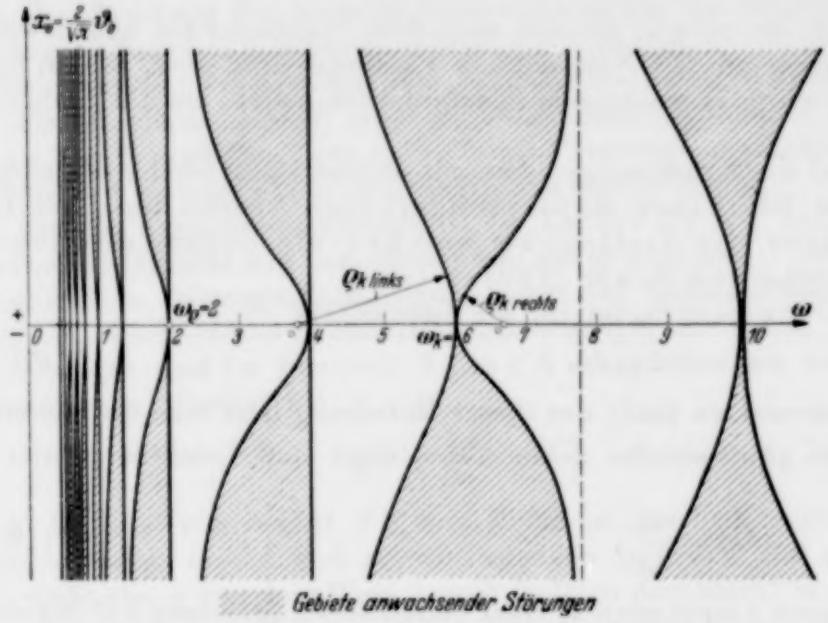

Abb. 2. Stabilitätskurven für das Beispiel.

2. Andere Lösungsmethoden; Vergleich der Ergebnisse. a) Ein anderer Ansatz zur Lösung. Ohne Ausführung von Einzelheiten soll in diesem Kapitel eine andere Methode zur Lösung der grundlegenden Differentialgleichung entwickelt werden, die zu besonderen Gesichtspunkten und Vergleichen führt.

Wesentlich für die Durchführbarkeit des Potenzreihen-Verfahrens war die Entwicklung der in den jeweiligen inhomogenen Gleichungen auftretenden Funktionen U_{xy} bzw. u_{xy} in Fourier-Reihen nach den aus der ersten homogenen Gleichung folgenden Eigenfunktionen. Hierdurch wird das Verfahren gewissermaßen in Fluß gebracht. Dies legt den Gedanken nahe, eine derartige Entwicklung in dem Gliede w_{xy} von vornherein zu versuchen. Danach wird von dem Ansatz

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} K_n T_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{73}$$

ausgegangen, und zwar soll die gesamte Reihe der Differentialgleichung genügen, nicht das einzelne Produkt $K_n T_n$.

Man erhält durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\sum_n T_n'' K_n + \sum_n T_n \Delta\Delta K_n + \vartheta \sum_n T_n K_{n_{xy}} = 0. \tag{74}$$

Ferner wird angenommen, daß $K_{n_{xy}}$ nach den K_n entwickelbar ist:

$$K_{n_{xy}} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \alpha_{n\varrho} K_\varrho. \tag{75}$$

womit die Summe des letzten Gliedes von (74) übergeht in

$$R \equiv \sum_n T_n K_{n_{xy}} = \sum_n T_n \sum_\varrho \alpha_{n\varrho} K_\varrho. \tag{76}$$

Hierin werden in üblicher Weise unter Voraussetzung der Zulässigkeit die Indizes und die Reihenfolge der Summationen vertauscht; so entsteht

$$R = \sum_n K_n \sum_\varrho \alpha_{\varrho n} T_\varrho. \tag{77}$$

Hiermit entsteht aus (74)

$$\sum_n T_n'' K_n + \sum_n T_n \Delta\Delta K_n + \vartheta \sum_n K_n \sum_\varrho \alpha_{\varrho n} T_\varrho = 0, \quad (\varrho, n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{78}$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn für jedes n einzeln die Gleichung

$$T_n'' K_n + T_n \Delta\Delta K_n + \vartheta K_n \sum_\varrho \alpha_{\varrho n} T_\varrho = 0 \tag{79}$$

oder

$$(T_n'' + \vartheta \sum_\varrho \alpha_{\varrho n} T_\varrho) K_n + T_n \Delta\Delta K_n = 0 \tag{80}$$

oder

$$\frac{T_n'' + \vartheta \sum_{\varrho} \alpha_{\varrho n} T_\varrho}{T_n} = -\frac{\Delta\Delta K_n}{K_n} = -l_n, \tag{81}$$

erfüllt wird, worin l_n eine Konstante bedeutet. Aus (81) entstehen dann die Differentialgleichungen für die T und die U

$$\left.\begin{aligned} T_n'' + l_n T_n + \vartheta \sum_{\varrho} \alpha_{\varrho n} T_\varrho = 0 \\ \text{und} \\ \Delta\Delta K_n - l_n K_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Bezüglich der K_n und l_n ist also eine große Vereinfachung eingetreten; diese sind jetzt die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte der Differentialgleichung für die schubfreie Platte.

Dafür enthält die Differentialgleichung für jedes T_n sämtliche T_ϱ; man hat es also nicht mit der einzelnen Gleichung in (82) zu tun, sondern mit einem System von unendlich vielen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$T_n'' + l_n T_n + \vartheta \sum_{\varrho=0}^{\infty} \alpha_{\varrho n} T_\varrho = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{83}$$

das sich auch schreiben läßt als

$$T_n'' + (l_n + \vartheta\, \alpha_{nn})\, T_n + \vartheta \sum_{\varrho}{}' \alpha_{\varrho n} T_\varrho = 0. \tag{84}$$

Der Strich am Summenzeichen gibt an, daß das Glied mit $\varrho = n$ in der Summe nicht vorkommt. Ausgeschrieben lautet (84) mit

$$\beta_{\varrho n} = \vartheta \alpha_{\varrho n} \tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned} T_0'' + (l_0 + \beta_{00}) T_0 + \beta_{10} T_1 + \beta_{20} T_2 + \beta_{30} T_3 + \cdots = 0, \\ \beta_{01} T_0 + T_1'' + (l_1 + \beta_{11}) T_1 + \beta_{21} T_2 + \beta_{31} T_3 + \cdots = 0, \\ \beta_{02} T_0 + \beta_{12} T_1 + T_2'' + (l_2 + \beta_{22}) T_2 + \beta_{32} T_3 + \cdots = 0, \\ \beta_{03} T_0 + \beta_{13} T_1 + \beta_{23} T_2 + T_3'' + (l_3 + \beta_{33}) T_3 + \cdots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

h) Vergleich mit den Ergebnissen von Mitteilung I. Hierzu ist

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.}, \qquad \beta_{\varrho n} = \text{konst. für alle } \varrho, n \tag{87}$$

zu setzen. Dann ist das System (86), wenn überhaupt, lösbar durch

$$T_n = \sum_{\varrho} A_\varrho e^{i \lambda_\varrho t}. \tag{88}$$

In bekannter Weise ergibt sich hieraus, zunächst rein formal, mit

$$l_n' = l_n + \beta_{nn} \tag{89}$$

zur Bestimmung der λ_ϱ die unendliche Determinante

$$D \equiv \begin{vmatrix} l_0' - \lambda & \beta_{10} & \beta_{20} & \beta_{30} \cdots \\ \beta_{01} & l_1' - \lambda & \beta_{20} & \beta_{31} \cdots \\ \beta_{02} & \beta_{12} & l_2' - \lambda & \beta_{32} \cdots \\ \beta_{03} & \beta_{13} & \beta_{23} & l_3' - \lambda \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0; \tag{90}$$

λ_ϱ ist eine der ϱ Wurzeln dieser Gleichung für λ.

Derartige unendliche Determinanten sind bekannt, ebenso die Bedingungen, unter welchen sie konvergieren, sowie zweckmäßige Methoden für die Auswertung. Jedenfalls gibt es einen zulässigen Bereich der maßgebenden Größen, für welchen D konvergiert und Lösungen hat, für den also das ganze Verfahren legitimiert ist.

In diesem Bereich erhält man unter Beschränkung auf einige Hauptpunkte folgenden Vergleich für die Ergebnisse der beiden Methoden:

1. In Mitteilung I ergab sich bei $\vartheta = \vartheta_0 =$ konst. eine allgemeine Lösung in der Form

$$w = \sum_p U_p T_p \qquad (p = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

hierin sind die U_p die Eigenfunktionen der mit ϑ_0 belasteten Platte (91)

$$T_p = A_p \sin \sqrt{\lambda_p}\, t + B_p \cos \sqrt{\lambda_p}\, t_s$$

und λ_p der zu U_p gehörige Eigenwert. } A.

In der hier durchgeführten Untersuchung ergab sich dagegen

$$w = \sum_n K_n T_n; \qquad (92)$$

hierin sind die K_n die Eigenfunktionen der schubfreien Platte; dabei ist

$$T_n = \sum_\varrho (A_\varrho \sin \sqrt{\lambda_\varrho}\, t + B_\varrho \cos \sqrt{\lambda_\varrho}\, t),$$

und die λ_ϱ ergeben sich aus $D = 0$. } B.

Bei A sind die U_p angegeben als unendliche Reihen in den K_n. Multipliziert man also (91) aus und faßt jeweils die Glieder mit gleichem K_n zusammen, so erhält man die Lösung in der Form B. Da hier nur eindeutige Lösungen in Frage kommen, so ergibt sich:

Die aus (90) folgenden λ_n sind die λ_p in A, und jedes der beiden Ergebnisse ist eine Umordnung des anderen.

2. Physikalisch ergeben sich aus A und B zwei verschiedene Anschauungsweisen für die Bewegung der Platte:

Nach A wird die Gestalt der Platte in jedem Augenblick aus den durch die U_p gegebenen Grundformen aufgebaut, also denjenigen der mit $\vartheta_0 \neq 0$ belasteten Platte. Für jede dieser Grundformen ergibt sich die zugehörige Änderung mit der Zeit durch eine einfache harmonische Funktion mit der Kreisfrequenz $\sqrt{\lambda_p}$. Die verschiedenen λ_p stehen zueinander in keinem rationalen Verhältnis; die Gesamtbewegung ist nichtperiodisch.

Nach B wird die Gestalt der Platte in jedem Augenblick aus den durch die K_n gegebenen Grundformen der schubfreien Platte aufgebaut. Für jede dieser Grundformen ergibt sich die zugehörige Änderung mit der Zeit durch ein Spektrum harmonischer Funktionen von unendlicher Komponentenzahl, wobei für jede Grundform der schubfreien Platte sämtliche λ_p in dem Spektrum auftreten.

3. Nach B ergeben sich die λ als Wurzeln der Gleichung $D = 0$, worin D eine unendliche Determinante ist.

Nach A ergibt sich jedes λ_p einzeln aus einem expliziten Ausdruck für dieses λ_p allein, der ohne Rücksicht auf die anderen unmittelbar auszuwerten ist.

A gibt also eine Methode zur expliziten Berechnung der einzelnen Wurzeln der Determinantengleichung (90), jede als Potenzreihe in ϑ_0, das als gemeinsamer Faktor in den Koeffizienten β der Determinante enthalten ist.

Auf weitere Einzelheiten sei hier nicht eingegangen.

c) Vergleich mit Abschnitt 1 dieser Mitteilung. Ist ϑ nicht konstant, sondern, wie in Abschnitt 1 dieser Mitteilung vorausgesetzt, $\vartheta = \Theta + \vartheta_0 \sin \omega t$, so lautet (84)

$$T_n'' + l_n T_n + (\Theta + \vartheta_0 \sin \omega t) \sum_{\varrho=0}^{\infty} \alpha_{\varrho n} T_\varrho = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (93)$$

Man könnte diesen Gleichungssatz als ein System von unendlich vielen *Mathieu*schen Gleichungen bezeichnen.

Dieses soll hier nicht direkt bearbeitet werden. Doch ist es indirekt, im Zusammenhang mit der Plattentheorie, in Abschnitt 1 der vorliegenden Mitteilung gelöst. Wenn man in der dort aufgestellten Lösung die U_p in den K_n ausdrückt, dann die Glieder mit jeweils gleichem K_n zusammenfaßt und dieses ausklammert, so stellen die Klammerinhalte Lösungen von (93) dar, entwickelt nach Potenzen des Parameters ϑ_0.

(Eingegangen am 7. Juni 1950.)

Anschrift des Verfassers: Professor *W. Kucharski*, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 34.

Druckfehlerberichtigung

zur Arbeit S ä n g e r: Luftzumischung zu Abgasstrahlen, Band XVIII, Seite 310.

S. 313, vor der Formel in der Mitte der Seite muß das Wort „Aus" hinzugefügt werden. Es muß heißen:

$$\text{Aus} \quad M = v_0 (\varrho_0 F_0 + \varrho_2 F_2), \quad \text{usw.}$$

S. 316, der letzte Teil der Gleichung (24) im Nenner muß heißen:

$$\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \quad \text{statt} \quad \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

S. 316, am Anfang der Gleichung (24a) muß es heißen:

$$\varrho_0 F_0 v_0^2 \quad \text{statt} \quad \varrho_0 = F_0 v_0^2$$

S. 317, 2. Zeile von unten:

d) Sonderfall $(F_2 - F_{20}) = 0$. statt $(F_2 - F_2) = 0$.

S. 318, das zweite Wurzelzeichen ist zu lang. Die Formel sieht so aus:

$$\sqrt{1 + \frac{2 g c_p T}{v^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right]}\left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

S. 319, die Formel in der Mitte der Seite muß heißen:

$$ME - \frac{1}{2} J^2 \quad \text{statt} \quad ME\,\frac{1}{2}\,J^2$$

S. 322, 12. Zeile von unten:

„Beispielstrahlrohres" statt „Beispielstahlrohres"